XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Equações Diferenciais Fuchsianas Associadas a Sistemas de Comunicação Através da Uniformização de Curvas Algébricas

Anderson J. Oliveira,
Departamento de Matemática - UNIFAL - MG
Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700
37130-001, Alfenas, MG
E-mail: anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br,

Reginaldo Palazzo Jr.,
Departamento de Comunicações - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Cidade Universitária Zeferino Vaz - Av. Albert Einstein, 400
13083-852, Distrito Barão Geraldo, Campinas - SP
E-mail: palazzo@dt.fee.unicamp.br.

O estudo de equações diferenciais ordinárias é amplamente explorado por uma série de pesquisadores, os quais analisam além do caráter teórico, as possíveis aplicações das mesmas. Um tipo especial de equações diferenciais ordinárias, as chamadas equações diferenciais fuchsianas ou de Fuchs, não tem uma gama muito grande de pesquisadores investigando, apesar de fazerem parte de uma grande quantidade de aplicações em problemas de Física-Matemática. Essas equações diferenciais apresentam como principal característica o fato de que todo ponto singular regular no plano complexo estendido é regular. Os casos mais estudados são aqueles envolvendo equações com três pontos singulares regulares, como são os casos das conhecidas equações hipergeométrica, de Legendre, de Tchebychev e a de Heun, com quatro pontos singulares regulares, [2], [4].

Em [5] e [3], é apresentada uma conexão entre equações diferenciais fuchsianas como um procedimento para a realização da uniformização de funções algébricas (hiperelípticas) identificadas com superfícies de Riemann, sendo que essa identificação se dá através da superfície de gênero máximo associado às equações.

Em [1], vemos que os blocos modulador - canal - demodulador, de um sistema de comunicação, podem ser representados através de um grafo, que em sua forma mais completa passa a ser visto como um grafo completo biparticionado, denotado por $K_{m,n}$, equivalentemente o canal é discreto e sem memória (DMC), denotado por $C_{m,n}$ com m-entradas e n-saídas, ou seja, nenhum dígito depende estatisticamente dos dígitos enviados anteriormente. Dado um canal discreto sem memória com m-entradas e n-saídas (visto como um grafo completo biparticionado $K_{m,n}$), o mergulho deste canal pode ocorrer dentre as superfícies com gênero mínimo e gênero máximo, isto é: $g_{min} \leq g \leq g_{max}$. Os m valores discretos na entrada do canal podem ser interpretados como os valores associados às raízes de uma curva algébrica com gênero g_{max} e, assim, identificar as singularidades de uma equação diferencial fuchsiana. Essas singularidades podem ser relacionadas com alguns elementos de uma sequência de Farey $\mathbb{F}_m(m \geq 1)$. Nessa abordagem, podemos identificar os geradores do grupo fuchsiano associados à região fundamental, conseguindo dessa forma a uniformização da curva algébrica planar. Essas singularidades podem ser vistas como o alfabeto a ser utilizado ao rotular os sinais em um processo de transmissão de informação.

Neste trabalho, nosso objetivo é estabelecer conexões entre as singularidades de equações diferenciais e superfícies de Riemann, para identificar a estrutura algébrica associada às equações diferenciais, de forma a fazer uso conveniente desses elementos no projeto de um sistema de transmissão de informação. Por meio dessas conexões, podemos analisar não apenas o gênero da superfície de Riemann, como também analisar a curva algébrica planar associada a essa superfície, através dos elementos da sequência de Farey, por meio da identificação das singularidades das equações diferenciais fuchsianas analisadas. Buscamos dar um direcionamento as seguintes questões: a partir das singularidades associadas a uma equação diferencial fuchsiana, como podemos relacioná-las a uma superfície de Riemann, sendo as mesmas elementos de uma sequência de Farey e além disso, identificar os geradores dos grupos fuchsianos associados a cada um dos polígonos fundamentais analisados? Como relacionar esses resultados a um problema de transmissão de informação, através do mapeamento casado entre grupos fuchsianos e constelações de sinais por meio do processo de uniformização de curvas algébricas planares? Além disso, como relacionar as singularidades de uma equação diferencial fuchsiana com um canal discreto sem memória (DMC), a fim de analisar o mergulho desse canal em superfícies?

Referências

[1] R. G. Cavalcanti, H. Lazari, J. D. Lima, and R. Palazzo Jr. *A new aproach to the design of digital communication systems*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theorical Computer Science, p. 1–33, 2003.

[2] G. Kristensson, Second Order Differential Equations - Special Functions and their classification. Springer, New York, 2010.

[3] M. Mursi, *On the uniformization of algebraic curves of genus 3*, J. London Math. Soc., p. 101–107, 1930.

[4] J. Vaz, Notas de Aula Métodos de Matemática Aplicada I. IMECC, Unicamp, 2012.

[5] E. T. Whittaker, *On Hyperlemniscate functions, a family of automorphic functions*, J. London Math. Soc., p. 274–278, 1929.

Palavras-chave: *equações diferenciais fuchsianas, superfícies, sistemas de comunicação.*

Agradecimentos: *Agradecemos à Capes, Fapesp, Unifal e Fapemig pelo apoio financeiro.*