XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Análise Matemática de um Modelo de Campo de Fase com Convecção na Parte Líquida Devido a Ação de um Campo Magnético

André F. Pereira,
DFM - Departamento de Física e Matemática - CEFET - MG
Av. Amazonas, 7675
30510-000, Belo Horizonte, MG
E-mail: andrefp@des.cefetmg.br.

Gabriela Planas
IMECC - Instituto Matemática Estatística e Computação Científica - UNICAMP - SP
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651
13083-859, Campinas, SP
E-mail: gplanas@ime.unicamp.br .

Apresentaremos resultados de boa colocação para um sistema de equações diferenciais que modela um processo isotérmico de solidificação de uma liga binária tridimensional que está sob o efeito de um campo magnético, provocando assim movimentação da parte líquida. Uma descrição completa do modelo pode ser encontrada em [2], já a análise matemática do caso bidimensional encontra-se em [1]. Obtivemos resultados similares aos encontrados em [1], ou seja, existência de solução fraca, princípio do máximo, regularidade para soluções e um resultado de continuidade das soluções com relação aos dados iniciais que implica na unicidade de solução. Além disso, obtivemos um resultado de existência de solução fraca para um caso degenerado do modelo proposto, neste caso utilizamos principalmente as ideias contidas em [3].

O modelo que descreve a evolução no tempo envolve as seguintes incógnitas: a velocidade do fluido $\mathbf{u}$, a pressão p, a função potencial do campo elétrico ϕ , a concentração relativa c de um dos compostos, e um outro parâmetro ψ que descreve o "quão sólido" está cada ponto da substância em um determinado tempo; esse parâmetro é conhecido como *campo de fase*, ψ é igual a 0 se o estado é sólido e igual a 1 se o estado é líquido e para os valores de ψ entre 0 e 1, a liga se encontra em um estado intermediário, chamado *mushy*. O modelo que descreve a evolução no tempo é o que segue.

$$
\begin{aligned}
&\rho_0\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{A}_1(\psi,c)+b(\psi)((-\nabla\phi+\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}) \ \text{ em } \ Q,\\
&\operatorname{div}(\mathbf{u})=0 \ \text{ em } \ Q\\
&\Delta\phi=\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) \ \text{ em } \ Q,\\
&\frac{\partial\psi}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi=\epsilon^2\Delta\psi+A_2(\psi,c) \ \text{ em } \ Q,\\
&\frac{\partial c}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)c=\operatorname{div}(D(\psi)\nabla c+A_3(\psi,c)\nabla\psi) \ \text{ em } \ Q,\\
&\mathbf{u}=\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial c}{\partial\mathbf{n}}=0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega\times(0,+\infty),\\
&\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0, \quad \psi(0)=\psi_0, \quad c(0)=c_0 \ \text{ em } \ \Omega,
\end{aligned}
$$

onde $Q=\Omega\times(0,+\infty)$ em que Ω é um domínio aberto e limitado em $\mathbb{R}^3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^∞, B é o campo magnético, ρ_0 é a densidade, μ é a viscosidade, ϵ é uma constante positiva dada, $\mathbf{n}$ é o campo de vetores unitários e normais a $\partial\Omega$ e $\mathbf{A}_1$, A_2, A_3 e D são funções não lineares. No caso degenerado citado acima, o coeficiente de difusão da concentração D se degenera, i.e., a hipótese será apenas que $0\leq D$, enquanto que no caso não degenerado $0<D_0\leq D$, em que D_0 é uma constante.

Referências

[1] A. Rasheed, A. Belmiloudi, *An analysis of a phase-field model for isothermal binary alloy solidification with convection under the influence of magnetic field*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **390**, p. 244–273, 2012.

[2] A. Rasheed, A. Belmiloudi, *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of Dendrite Growth Using Phase-Field Method witha Magnetic Field Effect*, Commun. Comput. Phys., **14**, nº 2, p. 477–508, 2013.

[3] J. F. Scheid, *Global solutions to a degenerate solutal phase-field model for the solidification of a binary alloy*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **5**, p. 207–217, 2004.

Palavras-chave: *campo de fase, Navier-Stokes, solidificação*

Agradecimentos: *Agradecemos ao CEFET-MG e a FAPEMIG pelo apoio financeiro.*