XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Existência e multiplicidade de solução para um problema elíptico em um cilindro ilimitado

Bruno M. Rodrigues
ICEB - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - UFOP - MG
Campus Universitário, Morro do Cruzeiro.
354000-000, Ouro Preto, MG
E-mail: brunomatep@gmail.com.

Olimpio H. Miyagaki
ICE - Instituto de Ciências Exatas - UFJF - MG
Campus Universitário, Martelos
36036-900, Juiz de Fora, MG
E-mail: ohmiyagaki@gmail.com

Ronaldo B. Assunção
ICEX - Instituto de Ciências Exatas - UFMG - MG
Avenida Antônio Carlos, Pampulha
30123-970, Belo Horizonte, MG
E-mail: ronaldo@mat.ufmg.br

Neste trabalho, obtemos resultados de multiplicidade e existência no caso supercrítico para um problema elíptico envolvendo um operador degenerado definido em um domínio cilíndrico ilimitado. Neste problema, como o domínio é ilimitado, a perda de compacidade da imersão de Sobolev torna as técnicas variacionais usais mais delicadas. De um modo geral, alguns tipos de propriedades geométricas e topológicas do domínio nos ajudam a mostrar resultados de existência de solução para problemas elípticos; por exemplo, a simetria do domínio pode ser usada para provar a imersão de Sobolev; no entanto, como consideramos domínios ilimitados, a perda de compacidade da imersão de Sobolev, não segue diretamente das técnicas variacionais usuais. Isto é uma das muitas dificuldades que tratamos neste trabalho.

Para provarmos nossos resultados, estudamos um problema auxiliar, e mostramos que suas soluções são axialmente simétricas e pertencem ao espaço de Sobolev $W_0^{1,p}$. Como de costume, isso é feito definindo um funcional energia $I : W_0^{1,p} \to \mathbb{R}$ e mostrando a existência de pontos críticos para o funcional I no espaço $W_0^{1,p}$. Esses pontos críticos são soluções fracas do problema auxiliar e, por nossa configuração, eles também resolvem nosso problema.

Como nosso domínio é ilimitado, a dificuldade de provarmos nossos resultados reside no fato de que $W_0^{1,p}$ não pode ser imerso compactamente em L^q. A fim de resolvermos a falta de compacidade, construímos um subespaço $W_{0,G}^{1,p} \subset W_0^{1,p}$ de funções invariantes por ação de um certo grupo de isometrias G, de modo que, $W_{0,G}^{1,p}$ está imerso compactamente em L^q; (ver [2, 3]).

Usando o princípio de criticalidade simétrica [4], podemos olhar para pontos críticos do nosso funcional I restrito a $W_{0,G}^{1,p}$. Dessa forma, obtemos uma solução fraca em $W_{0,G}^{1,p}$ para nosso problema, usando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [5]. Finalmente, para mostrarmos a existência da segunda solução usamos o princípio variacional de Ekeland [1].

Referências

[1] I. Ekeland, On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 47, 324-353, 1974.

[2] X. L. Fan and Y. Z. Zhao, Linking and multiplicity results for the p-Laplacian on unbounded cylinders. J. Math. Anal. Appl. 260, 479-489, 2001.

[3] L. P. Lions, Symmétrie et compacité dans les espaces sobolev. J. Math. Anal. Appl. 49, 315-334, 1982.

[4] S. R. Palais, The principle of symmetric criticality. Commun. Math. Phys. 69, 19-30, 1979.

[5] P. H. Rabinowtitz, "Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations". Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island. 1986.

Palavras-chave: *solução positiva; supercrítico, operador degenerado; métodos variacionais*

Agradecimentos: *Agradecemos à CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro.*