XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Efeitos de semi-isolamento em um fragmento populacional

Daniel J. Pamplona da Silva, **Renato P. Villar**, **Cesar H. Valentino**
ICT - Instituto de Ciência e Tecnologia - UNIFAL - MG
Rodovia José Aurélio Vilela, 11999 (BR 267 Km 533)
37715-400, Poços de Caldas, MG
E-mail: pamplona@unifal-mg.edu.br, renatopvillar@gmail.com, ceshv.151@gmail.com

O fenômeno de fragmentação de habitat gera o surgimento de ilhas populacionais, onde a vida pode prosperar mesmo que ao redor desta região propícia haja regiões impróprias a vida desta população.

Este problema esta inserido no contexto de dinâmica populacional, amplamente modelado pela equação de Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (FKPP) [1, 2, 4], a qual em uma dimensão possui a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u - bu^2 \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ é a densidade populacional, t é o tempo, x é a variável espacial, D é o coeficiente de difusão, $a(x)$ é a taxa de crescimento e b é uma constante de saturação (relacionada à capacidade de suporte).

A função $a(x)$ será usada para descrever a heterogeneidade espacial, onde assumimos $a(x) > 0$ como um termo de fonte - favorável à vida (fragmento, ilha) e $a(x) < 0$ como um sorvedouro - desfavorável à vida. O perfil descrito na Figura 1 representa o problema estudado neste trabalho.

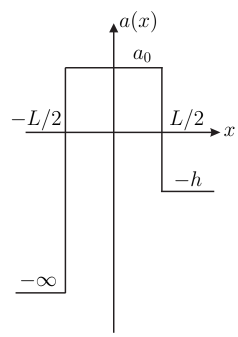

Figura 1: Representação de um sistema semi-isolado do meio externo. O lado não isolado possui dificuldade à vida representada pelo parâmetro h, L é o tamanho do fragmento e a_0 a taxa de crescimento interna ao fragmento (o quanto o fragmento é bom à vida).

O termo não-linear na Equação 1 está associado à saturação do ambiente (ruim para a vida), então se a população se extinguir sem saturação, esta será extinta mais rapidamente com a saturação [3], logo, suprimir o termo de saturação é um bom teste para a extinção. O termo de saturação é importante quando a densidade populacional é grande, mas com pouca densidade populacional, a competição intraespecífica é insignificante, então a supressão do termo de saturação também é um bom teste para a condição de vida [4].

Estamos interessados no "ponto de extinção", ou seja, a condição que separa as populações estáveis no tempo, daquelas que se extinguem, logo, eliminando a parte transiente, resolvemos apenas a parte espacial da Equação 1 - seríamos levados ao mesmo resultado se utilizássemos o método de separação de variáveis.

Tomando a equação diferencial ordinária resultante da parte espacial da Equação 1 depois de suprimir o termo não-linear e resolvendo separadamente em cada região onde $a(x)$ é constante e em seguida aplicando as condições de contorno e continuidade nas transições abruptas, encontramos o tamanho mínimo da ilha onde a vida é possível:

$$L_{ih} = \sqrt{\frac{D}{a_0}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\sqrt{\frac{h}{a_0}} \right) \right\}. \tag{2}$$

Este resultado é numericamente idêntico ao resultado implícito [4] que pode ser obtido como caso particular da literatura, porém a forma explícita do tamanho L em função dos demais parâmetros nos possibilita extrair fenômenos que a partir da solução numérica não é fácil de intuir. Um exemplo é a quantificação do alívio necessário no lado não isolado do fragmento estudado neste trabalho, pra compensar o lado isolado, de modo a obter um fragmento viável à vida com o mesmo tamanho mínimo que o proposto por Ludwig [3], o qual é simétrico e não isolado de ambos os lados. Uma curiosidade funcional que necessita de comprovação experimental, até mesmo para validação do modelo é que para um dado conjunto de parâmetros que definem as matrizes semi-isolada e não isolada, o fragmento mínimo proposto neste trabalho pode ser maior, menor ou igual ao de Ludwig, dependendo do quanto o fragmento é internamente propício a vida, ou matematicamente, dependendo do valor do parâmetro a_0.

Referências

[1] R. A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, Ann. Eugen,7, 355 (1937).

[2] V. M. Kenkre, N. Kumar, Nonlinearity in bacterial population dynamics: proposal for experiments for the observational of abrupt transitions in patches, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 105 (2008) 18752-18757.

[3] D. Ludwig, D. G. Aronson and H.F. Weinberger, V. M. Kenkre, N. Kumar, Spatial Patterning of the Spruce Budworm, J. Math. Biol. 8 (1979) 217.

[4] D. J. Pamplona da Silva, R. A. Kraenkel, Population persistence in weakly-coupled sinks, Physica A 391 (2012) 142-146.

Palavras-chave: *Crescimento Populacional, FKPP, Tamanho Mínimo de Fragmentos.*

Agradecimentos: *Os autores agradecem ao PET - Programa de Educação Tutorial pelo apoio financeiro.*