XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Sistemas Hamiltonianos polinomiais de grau 3 com centro nilpotente simétrico

Fabio Scalco Dias
Instituto de Matemática e Computação - UNIFEI - MG.
Avenida BPS 1303, Pinheirinho, CEP 37.500–903, Itajubá, MG.
E-mail: scalco@unifei.edu.br

Jaume Llibre
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.
08193 Bellaterra, Barcelona, Spain.
E-mail: jllibre@mat.uab.cat

Claudia Valls
Departamento de Matemàtica, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
1049-001 Lisboa, Portugal.
E-mail: cvalls@math.ist.utl.pt

Quando um sistema planar analítico tem um centro, então depois de mudanças de variáveis e reescalonamento no tempo, podemos escrevê-lo de uma das três seguintes formas:

$$x' = -y + P(x,y), \qquad y' = x + Q(x,y),$$

chamada de *centro linear*;

$$x' = -y + P(x,y), \qquad y' = Q(x,y),$$

chamada de *centro nilpotente*;

$$x' = P(x,y), \qquad y' = Q(x,y),$$

chamada de *centro degenerado*, onde P e Q são funções analíticas reais sem termos constantes e lineares, definidas em uma vizinhança da origem.

A classificação de centros para sistemas diferenciais polinomiais planares teve início com a caracterização de centros de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos, e estes resultados têm origem principalmente em Kapteyn [5], Bautin [1] e Zoladek [8, 9]. Para centros de sistemas diferenciais polinomiais de grau maior que 2 existem muitos resultados parciais. Por exemplo, os centros lineares para sistemas diferenciais polinomiais cúbicos da forma linear mais parte homogênea cúbica foram caracterizados por Malkin [6], e por Vulpe e Sibirskii [7]. Ainda há muito à fazer para obter uma classificação completa de centros para todos os sistemas diferenciais polinomiais de grau 3.

Mais recentemente, Colak, Valls e Llibre em [2, 3] classificaram os retratos de fase globais de sistemas Hamiltonianos planares tendo somente termos homogêneos lineares mais cúbicos os quais possuem um centro nilpotente na origem. Para isto os autores utilizaram a compactificação de Poincaré de campos vetoriais polinomiais. No preprint [4] classificamos os retratos de fase globais de sistemas Hamiltonianos planares de grau três com centro nilpotente na origem apresentando uma simetria com relação ao eixo x. Nosso principal resultado é o seguinte.

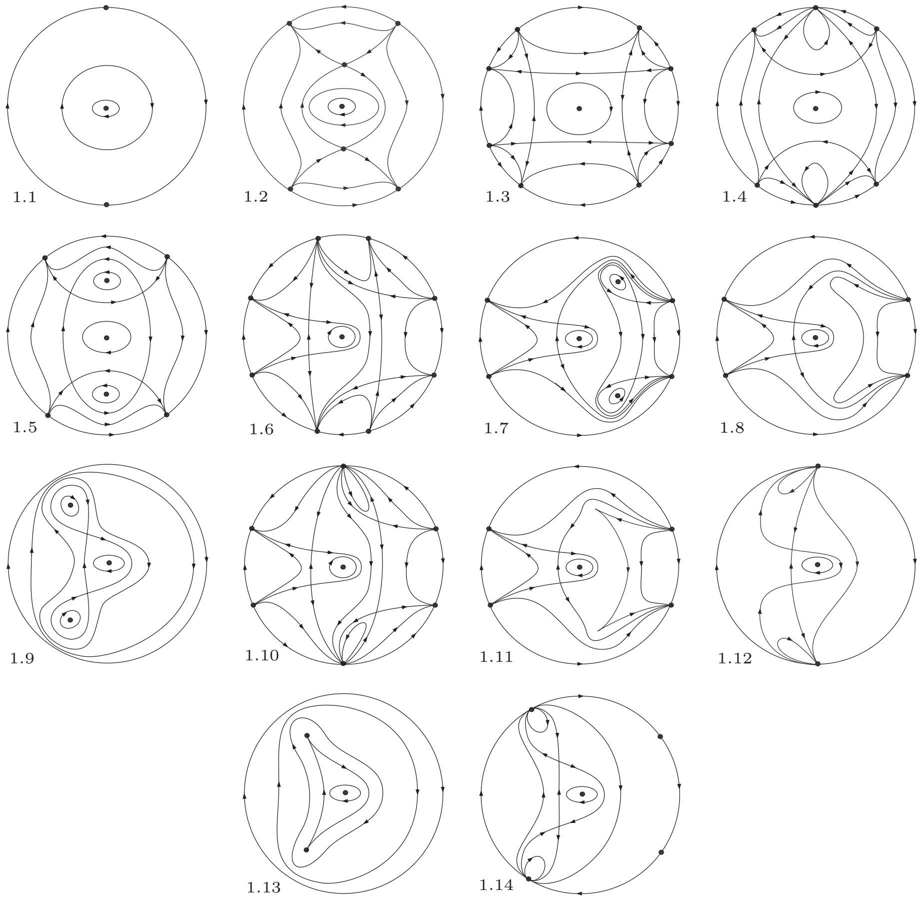

Figura 1: Retratos de fase globais dos campos de vetores do Teorema 0.1.

Teorema 0.1 *Um sistema Hamiltoniano polinomial de grau 3 com um centro nilpotente na origem e simétrico com relação ao eixo-x, depois de uma mudança linear de variáveis e um reescalonamento na variável independente, pode ser escrito como uma das seguintes cinco classes:*

(I) $x' = y, \quad y' = -x^3;$

(II) $x' = y \pm y^3, \quad y' = -x^3;$

(III) $x' = y + x^2y + ay^3, \quad y' = -x^3 - xy^2;$

(IV) $x' = y - x^2y + ay^3, \quad y' = -x^3 + xy^2;$

(V) $x' = y + 2xy + ax^2y + by^3, \quad y' = -x^3 - y^2 - axy^2$

onde a e b são parâmetros reais. Além disso, os retratos de fase globais dessas famílias são topologicamente equivalentes a um dos seguintes retratos exibidos na Figura 1:

a) 1.1 para sistemas (I)-(V);

b) 1.2 para sistemas (II) e (III);

c) 1.1, 1.3, 1.4 ou 1.5 para sistemas (IV);

d) 1.1, 1.6 - 1.14 para sistemas (V).

Referências

[1] N.N. Bautin, *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, Mat. Sb. **30** (1952), 181-196; Mer. Math. Soc. Transl. 100 (1954) 1-19.

[2] I. E. Colak, J. Llibre, C. Valls, *Hamiltonian linear type centers of linear plus cubic homogeneous polynomial vector fields*, J. Differential Equations, 257 (2014), 1623 – 1661.

[3] I. E. Colak, J. Llibre, C. Valls, *Hamiltonian nilpotent centers of linear plus cubic homogeneous polynomial vector fields*, Advances in Mathematics, 259 (2014), 655 – 687.

[4] F. S. Dias, J. Llibre and C. Valls, *The polynomial Hamiltonian systems of degree 3 with a nilpotent center at the origin symmetric with respect to the x-axis*, Preprint, (2017).

[5] W. Kapteyn, On the midpoints of integral curves of differential equations of the first Degree Nederl. Akad. Wetensch. Verslag Afd. Natuurk. Konikl. Nederland (1911), 1446–1457 (in Dutch).

[6] K.E. Malkin, Criteria for the center for a certain differential equation, Vols. Mat. Sb. Vyp. 2 (1964), 87–91 (in Russian).

[7] N.I. Vulpe and K.S. Sibirski, Centro-affine invariant conditions for the existence of a center of a differential system with cubic nonlinearities, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 301 (1988), 1297–1301 (in Russian); translation in: Soviet Math. Dokl. 38 (1989) 198–201.

[8] H. Zoladek, Quadratic systems with center and their perturbations, J. Differential Equations 109 (1994), 223–273.

[9] H. Zoladek, The classification of reversible cubic systems with center, Topol. Methods Nonlinear Anal. 4 (1994), 79–136.

Palavras-chave: *Sistemas Hamiltonianos, centro nilpotente, Retrato de fase, Compactificação de Poincaré.*

Agradecimentos: *Agradecemos à FAPEMIG Grant APQ-01086-15 e CAPES CSFPVE Grant 88881.030454/2013-01 pelo apoio financeiro.*