



Ground states for the pseudo-relativistic Hartree Nonhomogeneous Equations with external potential

Pedro Belchior, Hamilton Bueno, Gilberto Assis Pereira,

Departamento de Matemática - UFMG

E-mail: pedrobelchior18@gmail.com, hamilton@mat.ufmg.br, gilbertoapereira@yahoo.com.br

Olímpio Miyagaki

Departamento de Matemática - UFJF

E-mail: ohmiyagaki@gmail.com

Provamos a existência de solução positiva de energia mínima (*ground state*) para a equação não homogênea pseudo-relativista de Schrödinger

$$\begin{cases} \sqrt{-\Delta + m^2}u + Vu = (W * F(u)) f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

sendo $N \geq 3$, $m > 0$, $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ (com $f \in C^1$), sob as seguintes hipóteses:

$$(f_1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(t)|}{t} = 0,$$

$$(f_2) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{t^{\theta-1}} = 0 \text{ para algum } 2 < \theta < \frac{2N}{N-1},$$

$$(f_3) f'(t)t^2 - f(t)t \geq 0 \text{ para todo } t > 0,$$

(V) $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, e $V(y) + V_0 \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^N$ e para algum $V_0 \in (0, m)$.

(W) $W \in L^r(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é radialmente simétrico, para algum $r > \frac{N}{N(2-\theta)+\theta}$.

Uma mudança de variável permite uma formulação variacional equivalente para esse problema:

$$\begin{cases} -\Delta v + m^2v = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(0, y) = -V(y)v(y) + (W(y) * F(v(y))) f(v(y)) & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1)$$

Mostramos então que o funcional energia associado satisfaz a geometria do teorema do passo da montanha.

Em seguida, utilizando a variedade de Nehari, mostramos a convergência forte da sequência minimizante.

Utilizando iteração de Moser, mostramos que qualquer solução fraca de nosso problema pertence a $L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$.

Finalmente, mostramos que soluções fracas de (1) são sempre soluções clássicas e possuem decaimento assintótico exponencial.

Referências

- [1] X. Cabré and J. Solà-Morales: *Layer solutions in a half-space for boundary reactions*, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), no. 12, 1678-1732.
- [2] S. Cingolani and S. Secchi: *Ground states for the pseudo-relativistic Hartree equation with external potential*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **145** (2015), no. 1, 73-90.
- [3] F. Demengel and G. Demengel: *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, London, 2012.
- [4] E. H. Lieb and M. Loss: *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, no. 14, American Mathematical Society, 1997.
- [5] V. C. Zelati and M. Nolasco: *Existence of ground states for nonlinear, pseudo-relativistic Schrödinger equations*, Rend. Lincei Mat. Appl. **22** (2011), 51-72

Agradecimentos: *Agradecemos à CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro.*