XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Equação diferencial fracionária com a derivada de Hilfer-Katugampola

Daniela S. Oliveira, **E. Capelas de Oliveira**,
IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP - SP
R. Sérgio Buarque de Holanda, 651 - Cidade Universitária
13083-859, Campinas, SP
E-mail: ra142310@ime.unicamp.br, capelas@ime.unicamp.br,

Resumo: A derivada fracionária de Hilfer-Katugampola foi introduzida recentemente em [4]. Através desta formulação, propomos, como aplicação, considerar uma equação diferencial fracionária não linear com uma condição inicial e, então enunciamos um teorema que nos diz que, a solução desta é equivalente à solução de uma equação do tipo Volterra de segunda espécie. Logo em seguida consideramos casos particulares.

1 Introdução

Nesta seção apresentamos a integral fracionária generalizada a qual se faz necessário para introduzir a chamada derivada fracionária de Katugampola.

Definição 1 [3] *Sejam* $\alpha, c \in \mathbb{R}$ *com* $\alpha > 0$ *e* $\varphi \in X_c^p(a,b)$, *onde* $\varphi \in X_c^p(a,b)$ *consiste no espaço das funções Lebesgue-mensuráveis. As integrais fracionárias generalizadas, à esquerda e à direita, respectivamente, são definidas por*

$$({}^{\rho}\mathcal{J}_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}\,\varphi(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{1-\alpha}} dt, \qquad x > a \tag{1}$$

com $\rho > 0$.

Definição 2 [4] *Sejam* $0 < \alpha < 1$ *e* $0 \leq \beta \leq 1$, *denominados a ordem e o tipo da derivada fracionária, respectivamente. A derivada fracionária à esquerda, em relação a* x, *com* $\rho > 0$, *é definida por*

$$\begin{aligned} ({}^{\rho}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x) &= \left({}^{\rho}\mathcal{J}_{a+}^{\beta(1-\alpha)} \left(t^{\rho-1}\frac{d}{dt} \right) {}^{\rho}\mathcal{J}_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}\varphi \right)(x) \\ &= \left({}^{\rho}\mathcal{J}_{a+}^{\beta(1-\alpha)} \delta_\rho \, {}^{\rho}\mathcal{J}_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}\varphi \right)(x), \end{aligned}$$

para funções φ *tais que a expressão do lado direito exista.*

Consideremos a seguinte equação diferencial fracionária não linear

$$({}^\rho\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{a^+}\varphi)(x) = f(x,\varphi(x)), \quad x > a > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \rho > 0, \tag{2}$$

com a condição inicial

$$({}^\rho\mathcal{J}^{1-\gamma}_{a^+}\varphi)(a) = c, \quad \text{onde} \quad \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

O teorema a seguir mostra a equivalência entre o problema Eq.(2)-Eq.(3) e a equação integral do tipo Volterra, dada por

$$\varphi(x) = \frac{c}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} t^{\rho-1} f(t,\varphi(t))dt. \tag{4}$$

Em [1] e [2], problemas semelhantes a este são discutidos.

Teorema 1 *Sejam $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$, onde $0 < \alpha < 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$. Se $f(a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(\cdot,\varphi(\cdot)) \in C_{1-\gamma}[a,b]$ para qualquer $\varphi \in C_{1-\gamma}[a,b]$, então φ satisfaz* Eq.(2)-Eq.(3) *se, e somente se, satisfaz a* Eq.(4).

2 Problema de Cauchy para equações diferenciais

Nesta seção, apresentamos soluções explícitas para equações diferenciais envolvendo a derivada fracionária de Hilfer-Katugampola, $({}^\rho\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{a^+}\varphi)(x)$ de ordem $0 < \alpha < 1$ e tipo $0 \leq \beta \leq 1$ dadas no espaço $C^{\alpha,\beta}_{1-\gamma,\rho}[a,b]$.

Consideramos o seguinte problema de Cauchy

$$({}^\rho\mathcal{D}^{\alpha,\beta}_{a^+}\varphi)(x) - \lambda\varphi(x) = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$({}^\rho\mathcal{J}^{1-\gamma}_{a^+})(a) = c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha). \tag{6}$$

Supomos que, $f(x) \in C_{\mu,\rho}[a,b]$ com $0 \leq \mu < 1$ e $\rho > 0$. Então, pelo Teorema 1, o problema Eq.(5)-Eq.(6) é equivalente a resolver a seguinte equação integral

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{c}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t)dt. \end{aligned}\tag{7}$$

A fim de resolver a Eq.(7), utilizamos o método de aproximações sucessivas, isto é,

$$\varphi_0(x) = \frac{c}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) &= \varphi_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\varphi_{k-1}(t)dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}\tag{9}$$

Utilizando as Eq.(1) e Eq.(8), temos a seguinte expressão para φ_1

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \varphi_0(x) + ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}\varphi_0)(x) + ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}f)(x) \\ &= c\sum_{j=1}^{2}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j + \beta(1-\alpha))}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j + \beta(1-\alpha)-1} + ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}f)(x). \end{aligned}\tag{10}$$

De maneira análoga, utilizamos as Eq.(8), Eq.(9) e Eq.(10), de modo a obter a expressão para $\varphi_2(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \varphi_0(x) + ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a+}\varphi_1)(x) + ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a+}f)(x) \\
&= c\sum_{j=1}^{3}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j+\beta(1-\alpha))}\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\beta(1-\alpha)-1} + \lambda({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a+}\,{}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a+}f)(x) + ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a+}f)(x) \\
&= c\sum_{j=1}^{3}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j+\beta(1-\alpha))}\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\beta(1-\alpha)-1} + \int_a^x \sum_{j=1}^{2}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j)}t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho-t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j-1} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Continuando este processo, a expressão para $\varphi_k(x)$ é dada por

$$\varphi_k(x) = c\sum_{j=1}^{k+1}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j+\beta(1-\alpha))}\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\beta(1-\alpha)-1} + \int_a^x \sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j)}t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho-t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j-1} f(t)dt. \quad (11)$$

Tomando o limite $k \to \infty$, obtemos a expressão para $\varphi(x)$, isto é,

$$\varphi(x) = c\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j+\beta(1-\alpha))}\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\beta(1-\alpha)-1} + \int_a^x \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j)}t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho-t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j-1} f(t)dt.$$

Trocando o índice do somatório desta última expressão, $j \to j+1$, obtemos

$$\varphi(x) = c\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j}}{\Gamma(\alpha j+\gamma)}\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\gamma-1} + \int_a^x \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j}}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho-t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha j+\alpha-1} f(t)dt, \quad (12)$$

ou ainda, podemos reescrever a solução em termos da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= c\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}\left[\lambda\left(\frac{x^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}\right] \\
&+ \int_a^x t^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho-t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\left(\frac{x^\rho-t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}\right] f(t)dt. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Conclusão

Apresentamos a derivada fracionária de Hilfer-Katugampola. Com o uso desta definição apresentamos um problema de valor inicial não linear e sua equivalência com uma equação integral do tipo Volterra. Encontramos a solução analítica, através do método de aproximações sucessivas, de uma equação diferencial fracionária.

Referências

[1] K. M. Furati and M. D. Kassim and Tatar, N.-E. Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative. In "Computers and Mathematics with Applications", 1616 - 1626. 2012.

[2] M. D. Kassim and N.-E. Tatar, Well-posedness and stability for a differential problem with Hilfer-Hadamard fractional derivative. In "Abstract and Applied Analysis", 1-7. 2014.

[3] U. N. Katugampola, New approach to a generalized fractional integral. In "Applied Mathematics and Computation", 860-865. 2011.

[4] D. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira. Hilfer-Katugampola fractional derivative. "Submetido à publicação". 2017.

Palavras-chave: *integral fracionária generalizada, derivada fracionária de Hilfer-Katugampola, equação diferencial fracionária, equação integral de Volterra.*