XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Autovalores do Operador de Yamabe CR

Flavio A. Lemos,
Departamento de Matemática - UFOP
E-mail: Departamento de Matemática - UFOP,
Ezequiel Barbosa
Departamento de Matemática - UFMG
E-mail: ezequiel@mat.ufmg.br

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana compacta, orientável, estritamente pseudoconvexa, de dimensão $2n+1$ $n \geq 3$. A estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ terá curvatura escalar constante λ se, e somente se, u satisfazer a equação

$$p\,\Delta_b u + Ru = \lambda u^{p-1}, \tag{1}$$

em que $\Delta_b u$ é o sublaplaciano de u e ∇u sua derivada covariante, definida com respeito a estrutura pseudohermitiana θ. Essa equação é denominada **equação de Yamabe CR**. Essa equação é a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$Y(\widetilde{\theta}) = \frac{\int_M \widetilde{R} dV_{\widetilde{\theta}}}{\left(\int_M dV_{\widetilde{\theta}}\right)^{2/p}}, \tag{2}$$

em que $dV_{\widetilde{\theta}} = \theta \wedge d\theta^n$ é o elemento de volume CR. Esse funcional é também denominado **funcional de Yamabe CR**. . Podemos considerar

$$\lambda(M) = \inf\left\{Y(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta}\text{ é conforme à }\theta\right\}. \tag{3}$$

A constante $\lambda(M)$ é um CR-invariante, isto é, depende exclusivamente da estrutura CR e não da escolha da estrutura pseudohermitiana, chamado **invariante de Yamabe CR**. Definimos o **Segundo Invariante de Yamabe CR** como

$$\mu_2(M, \theta) = \inf_{\widetilde{\theta} \in [\theta]} \lambda_2(\widetilde{\theta}) V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}},$$

em que $\lambda_2(\widetilde{\theta})$ é o segundo autovalor do operador de Yamabe CR

$$L_{\widetilde{\theta}} = \left(2 + \frac{2}{n}\right)\Delta_{\widetilde{\theta}} + R.$$

Estudando o caso que $\mu_1(M, \theta) < 0$ chegamos a um resultado importante que nos da uma cota para o Segundo Invariante de Yamabe CR. Provamos também a invariância conforme do sinal dos autovalores do Operador de Yamabe CR.

Teorema 1 *Seja (M,θ) uma variedade CR pseudohertiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa , com dimensão CR igual a $2n+1$ e $n \geq 3$ com $\mu(M,\theta) = \mu_1(M,\theta) < 0$, então $\mu_2(M,\theta) \leq \mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})$.*

Teorema 2 *Seja (M,θ) uma variedade CR pseudohertiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa , com dimensão CR igual a $2n+1$ e $n \geq 3$. O sinal do autovalor λ_i do Operador de Yamabe CR é independente da estrutura pseudohermitiana tomada na classe conforme. Mais precisamente, para toda estrutura pseudohermitiana conforme $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$, onde u é uma função não negativa em $L^p(M)$, $\lambda_i(u)$ e $\lambda_i(1)$ tem o mesmo sinal.*

Referências

[1] D. Jerison, J. M. Lee - *Yamabe problem on CR manifolds*, J. Differential Geom., 25 (1987), 167-197.

[2] D. Jerison, J. M. Lee - *Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem*, J. Differential Geom., 29 (1989), 303-343.

[3] J.M. Lee and T.H. Parker - *The Yamabe problem*, Bull. AMS 17 (1987), 37-91.

Agradecimentos: *Agradecemos à CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro.*