XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Sobre o Controle Ótimo para um Modelo de Cascas Rasas

José A. Dávalos Chuquipoma,
DEMAT - Departamento de Matemáticas e Estatística - UFSJ - MG
Praça Frei Orlando, 170. Centro
36307-352, São João del Rei, MG
E-mail: jadc13@ufsj.edu.br,

Neste trabalho é analisado a existência de soluções do problema de controle ótimo para um modelo não linear de cascas rasas elásticas. A equação de estado é definido através de uma desigualdade variacional que modela a dinâmica do estado de equilíbrio dos pontos da casca [5]. Uma formulação via o método de penalização é proposta, tanto para a equação de estado como para o problema de contole ótimo [1]. Utilizando o problema de controle penalizado, é possível provar a existência de pelo menos uma solução do problema de controle exato.

O operador não linear para uma casca pouco profunda cuja superfície média ocupa um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ têm a forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u'' - \dfrac{\partial N_{1j}}{\partial x_j} \\ v'' - \dfrac{\partial N_{2j}}{\partial x_j} \\ w'' + \Delta^2 w - (N_{ij} w_{x_j})_{x_i} + k_{11} N_{11} + k_{22} N_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

As funções $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ descrevem os deslocamentos dos pontos da superfície média ao longo das direções tangenciais $x_1, x_2; w : \Omega \to \mathbb{R}$ é o deslocamento normal. Δ^2 é o operador biharmônico sobre x_1, x_2 e $k_{11}, k_{22} : \Omega \to \mathbb{R}$ são as curvaturas ao longo dos eixos x_1, x_2 respectivamente. N_{ij} representa a integração das tensões $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2$, dadas pelas equações constitutivas

$$N_{11} = \epsilon_{11} + \rho\epsilon_{22}, \quad N_{22} = \epsilon_{22} + \rho\epsilon_{11}, \quad N_{12} = \frac{1}{2}(1-\rho)\epsilon_{12}, \tag{2}$$

$$\epsilon_{11} \;=\; u_{x_1} + k_{11} w + \frac{1}{2} w_{x_1}^2, \quad \epsilon_{22} \;=\; u_{x_2} + k_{22} w + \frac{1}{2} w_{x_2}^2, \tag{3}$$

$$\epsilon_{12} \;=\; u_{x_2} + v_{x_1} + w_{x_1} w_{x_2}\ .$$

onde ρ é uma constante, $0 < \rho < 1/2$. Seja $T > 0, Q = \Omega \times (0, T)$ e K um subconjunto fechado convexo de $L^2(\Omega)$, contendo zero. Khludnev e Sokolonwski [5], provam a existência de uma solução $u, v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), w \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ do seguinte problema de valor na fronteira e condição inicial:

$$u' - \int_0^t \frac{\partial N_{1j}}{\partial x_j} d\tau = F_1, \tag{4}$$

$$v' - \int_0^t \frac{\partial N_{2j}}{\partial x_j} d\tau = F_2, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \Big\langle w' \quad + \quad & \int_0^t \{\Delta^2 w - (N_{ij} w_{x_j})_{x_i} + k_{11} N_{11} + k_{22} N_{22}\} d\tau \ , \ \varphi - w \Big\rangle dt \\ \geq \quad & \int_0^T \langle F, \varphi - w \rangle dt \quad \forall \varphi \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega)),\ \varphi(t) \in K, \end{aligned} \tag{6}$$

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0 \quad \text{em } t = 0, \tag{7}$$

$$w(t) \in K \quad \text{quase sempre em} \quad (0,T), \tag{8}$$

$$F_1 = u_1 + \int_0^t f_1(\tau) d\tau, \quad F_2 = v_1 + \int_0^t f_2(\tau) d\tau, \quad F = w_1 + \int_0^t f(\tau) d\tau. \tag{9}$$

Uma distribuição ótima de forças esternas é atingido via minimização da funcional de custo J, que depende do controle $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f)$ e da variável estado $U = (u, v, w)$ solução de (4)-(9),

$$J(\mathcal{F}, U) = \|U(\mathcal{F}) - \mathcal{Z}\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\mathcal{F}\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{10}$$

onde $\mathcal{Z} \in \mathbf{L}^2(0,T;L^2(\Omega))$ é uma função dada (função observação). Especificamente, é provado a existência de soluções do seguinte problema de controle ótimo:

$$(P) \begin{cases} \text{Encontrar} \quad \mathcal{F}^* & \in \quad U_{ad} \text{ tal que} \\ \qquad J(\mathcal{F}^*, U^*) & \leq \quad J(\mathcal{F}, U) \qquad \forall \mathcal{F} \in U_{ad}, \\ \quad \text{para} \quad U \quad \text{solução de} \quad (4) - (9), \end{cases}$$

onde $U_{ad} \in \mathbf{L}^2(0,T;L^2(\Omega))$ é um conjunto fechado convexo e $U^* = (u^*, v^*, w^*)$ é o estado ótimo associado ao controle ótimo $\mathcal{F}^*$.

Referências

[1] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*. Research Notes in Mathe-matics, Vol. 100. Pitman Advanced Publishing Program, Iasi, 1983.

[2] J. A. D. Chuquipoma, C. A. Raposo and W. D. Bastos, *Optimal control problem for deflection plate with crack*. Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 18, Issue 3, p. 397-417, 2012.

[3] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inequations en Mecanique et en Physique*. Springer-Verlag, Dunod, Paris, 1972.

[4] A. Khludnev, V. Kovtunenko, Analysis of Cracks in Solids. WIT Press Southampton-Boston, 2000.

[5] A. Khludnev, J. Sokolowski, Modelling and Control in Solid Mechanics. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 122, Birkhäuser Verlag, 1997.

[6] J. P. Puel, Some Results on Optimal Control for Unilateral Problems. Contr. Partial Diff. Equat. Proc./IFIP WG 7.2 Work. Conf., Santiago de Compostela, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol.114, pp.225-235, 1987.

Palavras-chave: *Cascas finas, Método de Penalização, controle ótimo.*
Agradecimentos: *Agradecemos à CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro.*