XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Equações Diferenciais Aplicadas ao Modelo de Malthus na Dinâmica de Crescimento da População dos Estados do Sudeste Brasileiro

Ana Carolina de Oliveira, **Aline de Assis G. Pereira**, **Walef Machado**
ICSA - Instituto de Ciências Sociais Aplicadas - UNIFAL - MG
Av. Celina Ferreira Ottoni, 4000
37048-395, Varginha, MG
E-mail: ana_coliveira@outlook.com, alineassispereira@hotmail.com, walefm2@gmail.com.

Marcelo Jorge Nascimento Souza
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB
E-mail: marcelo.nascimento@ufob.edu.br.

Este trabalho apresenta uma aplicação de equações diferenciais à dinâmica populacional. Destaca-se o Modelo de Malthus que foi quem tentou, pela primeira vez, estimar o crescimento da população mundial em 1798 [1]. No modelo matemático criado por Thomas Robert Malthus, a população mundial crescia em proporção geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresciam apenas em proporção aritmética.

Seja P uma determinada população, o Modelo de Malthus é definido por uma equação diferencial separável, que pode ser escrita na forma:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P\beta, \tag{1}$$

onde a constante de proporcionalidade β é chamada taxa de crescimento ou declínio, caso seja positiva ou negativa respectivamente.

Uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis é definida por:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)f(y). \tag{2}$$

Essa função é dita separável pelo fato de que esta pode ser separada em uma função de x e uma função de y [2]. Assim, reescrevemos a equação (2) na forma diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{f}(y)} = g(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Com isso, toda dependência de y está em um lado da equação e toda dependência de x está no outro. Podemos, portanto, integrar ambos os lados da equação (3) que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{f}(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Expressando a equação (1) da forma descrita anteriormente, temos:

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{P} = \int \beta \mathrm{d}t. \tag{5}$$

Ao solucionar a equação (5) obtemos:

$$ln\,|P| = \beta t + C. \tag{6}$$

Isolando P da equação (6), temos:

$$|P| = e^{\beta t} e^{c}, \tag{7}$$

ou seja,

$$P = Ce^{\beta t}, \tag{8}$$

onde $C = e^c$ é uma constante arbitrária.

Nesse caso vamos supor $\beta > 0$, de modo que a população está crescendo. Resolvendo a equação (8) sujeita a condição inicial $(t = 0)$

$$P(0) = C, \tag{9}$$

onde C pode ser considerado o valor inicial da função, ou seja, para o nosso modelo $C = P_o$. Onde P_o é a população em $t_0 = 0$.

Obtemos o modelo para o crescimento populacional conhecido como Modelo de Malthus

$$P = P_0 e^{\beta t}, \tag{10}$$

onde a taxa β é uma constante de proporcionalidade que relaciona a Natalidade (n) com a Mortalidade (m) e definida por:

$$\beta = n - m. \tag{11}$$

Este modelo é bastante simples e válido ao considerar que crescimento da população estudada está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas as taxas de migração [3]. Dessa forma, considera-se a diferença entre as taxas de natalidade e de mortalidade um valor constante β. Por conta de ser um modelo simples, suas estimativas são relativamente próximas à população real nos anos analisados e, pode-se dizer que quando não há informações suficientes para avaliar a população de uma determinada localidade, esse modelo se aplica de forma aceitável.

Para verificar a validade desse modelo, este trabalho propõe estudar a população da região sudeste do Brasil que compreende os estados de Minas Gerais, Rio de Janeiro, São Paulo e Espiríto Santo. Assim, é possível demonstrar que, embora seja um modelo simples e que não leva em conta metodologias da área de estudo demográfica, ele pode ser aplicado de forma a facilitar a estimativa de populações sem depender de microdados regionais. Os resultados foram obtidos mediante implementações computacionais para validar as definições propostas obtendo-se uma curva característica com a estimativa da população para cada um dos estados analisados.

Referências

[1] M. L. A. Magalhães and N. M. G. Leite, *Equações Diferenciais Aplicadas à Dinâmica Populacional*, Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional – CMAC Nordeste, ISNN 2317–3297, p. 351–353, 2012.

[2] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th ed. John Wiley & Sons Inc., New York, 2001.

[3] A. D. M. Bezerra et al, *Equações Diferenciais Aplicadas ao Modelo de Malthus na Dinâmica de Crescimento da População de Bataguassu–MS*. Revista Conexão Eletrônica, Vol. 13, n.1, Três Lagoas – MS, 2016.
Palavras-chave: *Modelo de Malthus, População, Equação Diferencial*
Agradecimentos: *Agradecemos à FAPEMIG pelo apoio financeiro.*