XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Análise Assintótica de Equações da Onda não Lineares via Grupo de Renormalização

Gastão A. Braga, **Jussara de Matos Moreira**,
Departamento de Matemática - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901, Belo Horizonte, MG
E-mail: gbraga@mat.ufmg.br, jmoreira@mat.ufmg.br,

Antônio Marcos da Silva
Departamento de Matemática - Universidade Federal de Ouro Preto
R. Diogo de Vasconcelos, 122 - Pilar
35400-000, Ouro Preto, MG
E-mail: antonioms.mat@gmail.com

O objetivo deste trabalho é estudar as propriedades assintóticas do seguinte problema de Cauchy para a equação da onda:

$$\begin{aligned} b(t)u_t - u_{xx} + u_{tt} &= F(u, u_x, u_t), \;\; t > 1, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 1) &= u_0(x), \\ u_t(x, 1) &= v_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

em que $b(t) = \mu/t^\gamma$, $\mu > 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$ e $F(z_1, z_2, z_3)$ é uma função analítica em $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ e com representação

$$F(z_1, z_2, z_3) = z_1^a z_2^b z_3^c + \sum_{n_1 > a, n_2 > b, n_3 > c} C_{n_1,n_2,n_3} z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}, \tag{2}$$

com $a, b, c \in \mathbb{N}$. A parcela $b(t)u_t$ é considerada como um termo de amortecimento enquanto que F, o termo de fonte, carrega a não-linearidade do problema. Sem perda de generalidade, fixamos atenção no problema com $x \in \mathbb{R}$ embora o mesmo possa ser reformulado em $\mathbb{R}^n$.

Quando $\gamma = 0$, a equação (1) linear

$$\mu u_t - u_{xx} + u_{tt} = 0$$

é conhecida como a *Equação do Telégrafo*. A solução $u(x, t)$ do problema de Cauchy associado

$$\begin{aligned} \mu u_t - u_{xx} + u_{tt} &= 0, \;\; t > 1, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 1) &= u_0(x), \\ u_t(x, 1) &= v_0(x), \end{aligned} \tag{3}$$

admite uma representação integral em termos das suas componentes de Fourier e, dessa representação, é possível concluir que, para tempos longos,

$$u(x,t) \approx \frac{M}{\sqrt{t}} f_\mu^* \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right), \tag{4}$$

em que $f_\mu^*(x)$ é o perfil gaussiano

$$f_\mu^*(x) = \sqrt{\frac{\mu}{4\pi}} e^{-\mu \frac{|x|^2}{4}} \tag{5}$$

e o pré-fator M é dado pela integral

$$M = \int u_0(x) + \frac{1}{\mu} v_0(x) dx. \tag{6}$$

A equação (3) é hiperbólica e as suas soluções são superposições de ondas. Contudo, assintoticamente, o efeito dissipativo criado pelo termo μu_t é forte o suficiente para se sobrepor à natureza ondulatória da solução $u(x,t)$ e impor o comportamento difusivo observado em (4). Além disso, se $v(x,t)$ é a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mu v_t - v_{xx} &= 0, \;\; t > 1, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ v(x,1) &= u_0(x) + \frac{1}{\mu} v_0(x), \end{aligned} \tag{7}$$

então, para tempos longos,

$$u(x,t) \approx v(x,t), \tag{8}$$

onde $u(x,t)$ é a solução do problema de Cauchy (3). Esta similaridade assintótica nos faz questionar se o comportamento (4), ou equivalentemente (8), poderia ser obtido via grupo de renormalização [2–7]. Esta é uma questão não-trivial pois o problema de Cauchy inicial trata de uma equação hiperbólica, enquanto o grupo de renormalização está matematicamente estabelecido para equações do tipo parabólicas. Além disto, é natural questionar se o comportamento difusivo (4) persistirá se não-linearidades forem adicionadas à equação (3) ou se o expoente γ do coeficiente de amortecimento $b(t)$ for positivo. Similarmente, também é natural perguntar se os métodos multiescala funcionarão neste contexto mais geral de equações hiperbólicas não-lineares.

Dessa forma, esse trabalho pretende determinar sob que condições no expoente γ e na não-linearidade F, existirá uma equação parabólica, similar à equação (7), cuja solução seja assintoticamente equivalente à solução $u(x,t)$ do problema de Cauchy (1) e, sob tais condições, determinar formas de implementar o grupo de renormalização nesta situação mais geral.

Referências

[1] N. Hayashi, E. Kaikina, P. Naumkin and I. Shishmarev, *Asymptotics for a Nonlinear Integral Equation with a Generalized Heat Kernel*, Lecture Notes in Mathematics. Springer, N.Y., 2006.

[2] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2^{nd} edition, 1996.

[3] N. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison-Wesley, Reading, 1992.

[4] J. Bricmont, A. Kupiainen and G. Lin, *Renormalization Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*, "Comm. Pure Appl. Math.", 47, 893-922, 1994.

[5] G. A. Braga, F. Furtado, J. M. Moreira, and L. T. Rolla, *Renormalization Group Analysis of Nonlinear Diffusion Equations with Time Dependent Coefficients: Analytical Results*, "Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B", vol. 7, pp. 699–715, 2007.

[6] G. Braga and W. Conti, *A Multiscale Asymptotic Analysis of Time Evolution Equations on the Complex Plane*, "Journal of Mathematical Physics", v. 57, p. 073504-, 2016.

[7] G A. Braga, P. Carrião and A. Ruas, *Existence of scale invariant solutions to horizontal flow with a Fujita's type diffusion coefficient*, "Electron. J. Diff. Equ.", Vol. 2012, No. 104, pp. 1-10, 2012.

Palavras-chave: *análise assintótica, equações de onda, grupo de renormalização* **Agradecimentos:** *Agradecemos à CAPES e a FAPEMIG pelo apoio financeiro.*