XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Comparação entre métodos iterativos na solução de problemas estacionários através de diferenças finitas exponencial

Beatriz L. Carreira, **Analice C. Brandi**
FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP - SP
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: bia.liara36@hotmail.com, analice@fct.unesp.br.

1 Introdução

Problemas de equilíbrio são aqueles em que a propriedade de interesse não depende da evolução temporal e em grande parte são modelados por equações diferenciais parciais elípticas. Essas equações nem sempre permitem serem resolvidas analiticamente, logo é viável aplicar estratégias computacionais capazes de solucionar equações com alto nível de complexidade.

Recentemente, um novo método numérico foi desenvolvido por Pandey [2], chamado de método de diferenças finitas exponencial de quarta ordem e simulado computacionalmente para equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem. Os sistemas lineares resultantes da discretização de problemas elípticos, utilizando o método exponencial, geralmente tem uma matriz de discretização esparsa e convém recorrer ao uso dos métodos iterativos para obter sua solução. Neste contexto, surge a motivação para realização deste trabalho, que consiste numa comparação dos métodos aplicados para resolver os sistemas provenientes da aplicação do método exponencial.

2 Formulação Matemática

Uma das principais equações elípticas que representam os problemas de equilíbrio é a equação de Poisson dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{1}$$

discretizada numa região quadrada $\Omega = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\}$ com condição de contorno do tipo Dirichlet $u(x, y) = g(x, y)$ na fronteira da região Ω.

3 Formulação Numérica

Considerando a Equação (1) discretizada numa região quadrada com condição de contorno do tipo Dirichlet, o método de diferenças finitas exponencial pode ser representado pela seguinte equação:

$$a_0(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+a_1(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})+a_2u_{i,j} = b_0h^2f_{i,j}e^{\phi(h)}, \quad (2)$$

em que a_0, a_1, a_2 e b_0 são constantes, a variável h representa o espaçamento nas direções x e y, e ϕ é uma função diferenciável. O desenvolvimento do método baseia-se em Série de Taylor, Série de Mac Lauren e expansão exponencial. A equação do novo método na forma final é dada por:

$$4(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})-20u_{i,j} = 6h^2f_{i,j}e^{\frac{h^2\nabla^2 f_{i,j}}{12f_{i,j}}}, \quad (3)$$

em que o laplaciano é aproximado por diferenças finitas de segunda ordem.

3.1 Métodos Numéricos para Solução de Sistemas Lineares

Tratando-se da solução de sistemas lineares, os métodos iterativos são bastante eficientes, principalmente quando a matriz dos coeficientes é esparsa. Sendo assim, neste trabalho são testados os métodos de Gauss-Seidel, Sucessive Over Relaxation e Gradientes Conjugados, como são descritos abaixo.

3.1.1 Método de Gauss-Seidel

Para resolver um sistema linear $Ax = f$, decompõe-se a matriz A na soma $L + D + U$, sendo L a matriz triangular estritamente inferior, D a matriz diagonal e U a matriz triangular estritamente superior. A partir disso, decompõe-se a matriz A novamente em $M + N$ e o método iterativo é definido por:

$$Mx^{(k)} = f - Nx^{(k-1)}, \quad \text{com} \quad k = 1, 2, ... \quad (4)$$

sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial e k o número de iterações. No método de Gauss-Seidel ocorre $M = L + D$ e $N = U$ e o método escrito na forma matricial consiste em

$$x^{(k)} = (L + D)^{-1}f - (L + D)^{-1}Ux^{(k-1)}. \quad (5)$$

3.1.2 Sucessive Over-Relaxation - SOR

Nos métodos iterativos, a diferença entre as sucessivas aproximações pode diminuir, havendo necessidade de muitas iterações para alcançar uma boa solução. O método SOR tem o propósito de amenizar este efeito e pode ser definido por meio da iteração:

$$x^{(k)}_{SOR} = (1 - \omega)x^{(k-1)}_{SOR} + \omega x^{(k)}_{GS}, \quad (6)$$

em que x_{GS} é um vetor avaliado no método de Gauss-Seidel, x_{SOR} é o vetor avaliado no método SOR e ω é o fator de relaxação. Então basta substituir a Equação (5) na Equação (6), e obtém

$$x^{(k)} = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U]x^{(k-1)} + \omega(D + \omega L)^{-1}f. \quad (7)$$

Para convergência do método é necessário $0 < \omega < 2$.

3.1.3 Método dos Gradientes Conjugados

Se a matriz A do sistema linear for simétrica e definida positiva, é possível definir um método iterativo da forma $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$, em que $\alpha_k \neq 0$ é um parâmetro que pode variar em cada iteração e $p^{(k)}$ é uma sucessão de vetores A-ortogonais capaz de acelerar a convergência do método e que depende do vetor resíduo $r^{(k)} = f - Ax^{(k)}$. Dessa forma, fazendo $p^{(0)} = r^{(0)}$, o método pode ser dado pelo algoritmo a seguir, onde β_k desempenha o papel de garantir que a direção de $p^{(k+1)}$ seja A-conjugada com a direção de $p^{(k)}$:

$$\alpha_k = \frac{(p^{(k)})^T r^{(k)}}{(p^{(k)})^T A p^{(k)}},$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)},$$
$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A p^{(k)},$$
$$\beta_k = \frac{(Ap^{(k)})^T r^{(k+1)}}{(Ap^{(k)})^T p^{(k)}},$$
$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}.$$

4 Resultados Numéricos

Considerando a Equação (1) com $f(x,y) = 2e^{x+y}$ e condição de contorno de Dirichlet $u(x,y)$ em todos os lados unitários de um quadrado [1]. A solução exata é dada por $u(x,y) = e^{x+y}$. Neste trabalho, foi realizada uma busca a fim de determinar um fator de relaxação que produzisse a menor quantidade de iterações possível. Os fatores determinados foram 1.2, 1.5, 1.7 e 1.8 para as malhas grossa ($h = 0.25$), intermediária grossa ($h = 0.125$), intermediária fina ($h = 0.0625$) e fina ($h = 0.03125$), respectivamente.

E, ainda, foi realizada uma comparação entre os métodos iterativos através do número de iterações realizadas e pelo valor do erro máximo absoluto $\|E\|_\infty$. O critério de parada foi estabelecido para um erro inferior a 10^{-10} ou uma quantidade de iterações superior a 10^5.

Tabela 1: Comparação entre os métodos de resolução de sistemas lineares.

	Erro			**Iterações**		
Malha	**GS**	**SOR**	**GC**	**GS**	**SOR**	**GC**
Grossa	1.8140e-05	1.8140e-05	1.8140e-05	30	18	7
Intermediária Grossa	1.1535e-06	1.1519e-06	1.1519e-06	115	38	25
Intermediária Fina	8.5815e-08	7.3184e-08	7.3178e-08	425	74	52
Fina	6.3508e-08	7.5683e-09	4.5725e-09	1574	156	103

Nota-se que o método de Gauss-Seidel consegue boas aproximações realizando uma quantidade razoável de iterações. Porém, o método dos gradientes conjugados e SOR aproximam a solução realizando um número inferior de iterações, sendo o método dos gradientes ainda melhor.

5 Conclusão

O método exponencial é uma nova técnica de diferenças finitas que tem apresentado bons resultados, e que responde bem ao refinamento da malha. Quanto aos métodos iterativos, o método dos gradientes conjugados demonstrou um melhor desempenho em relação aos demais, mostrando o quanto pode ser vantajosa a utilização deste método.

Referências

[1] A. O. Fortuna, *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*, 552 pages. EDUSP, 2012.

[2] P. K. Pandey, *A higher accuracy exponential finite difference method for the numerical solution of second order elliptic partial differential equations*, Journal of Mathematical and Computational Science, **1927-5307** p. 1325–1334, New Delhi, 2013.

Palavras-chave: *Método de Diferenças Finitas Exponencial, Métodos Iterativos.*

Agradecimentos: *Agradecemos à FAPESP pelo apoio financeiro, processo nº 2016/08343-2.*