XI EMED - ENCONTRO MINEIRO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
20 A 22 DE NOVEMBRO DE 2017
POÇOS DE CALDAS-MG

Permanência de soluções do modelo de moscas varejeiras de Nicholson com retado

Carolinne S. Souza,
IBILCE - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP - SP
Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: ssouza.carolinne@gmail.com,

Suzete M. S. Afonso
IGCE - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP - SP
Avenida 24-A, 1515, SP
13506-900, Rio Claro, SP
E-mail: smafonso@rc.unesp.br.

Resumo: Neste trabalho, iremos estabelecer condições para guarantir a permanência de soluções para o modelo de moscas varejeiras de Nicholson com retardo

$$\begin{cases} x'(t) = \delta(t)x(t) + R(t)x(t-\sigma(t))\exp[-a(t)x(t-\sigma(t))], t > 0, \\ x(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau, 0], \end{cases},$$

em que $\varphi : [-\tau, 0] \longrightarrow [0, \infty)$ *é uma função contínua, tal que* $\varphi(0) > 0$*,* $\delta, a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ *e* σ*,* $R : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ *são funções contínuas periódicas de período* $\omega > 0$*.*

Alguns exemplos serão fornecidos para ilustrar nossos resultados.

1 Introdução

Modelos mais realistas e interessantes de crescimento de uma única ou múltiplas espécies devem levar em conta o ambiente e os efeitos do tempo com retardo. A equação abaixo foi introduzida por Nicholson para modelar a população de moscas de laboratório, onde é assumido que os parâmetros biológicos e ambientais são periódicos com um período comum

$$x'(t) = \delta(t)x(t) + R(t)x(t-\sigma(t))\exp[-a(t)x(t-\sigma(t))],$$

em que δ, $a \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$, R, $\sigma \in C(\mathbb{R}, [0, \infty))$ são funções $\omega-$periódicas.

Em termos biológicos, a função x é o tamanho da população, δ é o máximo per capita de produção diária de ovos, $\frac{1}{a}$ é o tamanho que a população reproduz a sua taxa diária máxima e R é o máximo per capita da taxa de mortalidade diária adulta.

Sejam $\tau = \max\limits_{t\in[0,\omega]} \sigma(t)$ e $\varphi \in C([-\tau,0],[0,\infty))$, tal que $\varphi(0) > 0$. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x'(t) = \delta(t)x(t) + R(t)x(t-\sigma(t))\exp[-a(t)x(t-\sigma(t))], \quad t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t), \text{ for } t \in [-\tau, 0] \end{cases}, \tag{1}$$

Para cada valor inicial φ, existe pelo menos uma solução contínua x do sistema acima e, pelo método de passos, é possível mostrar que $x(t) > 0$ para $t \geq 0$. Denotemos a solução do sistema (1) por $x(t,\varphi)$.

Grosso modo, um sistema será dito permanente quando dado um valor inicial φ, é possível limitar, inferior e superiormente, todas as soluções $x(t,\varphi)$, a partir de um ponto t. Em outras palavras, ao ser encontrada uma solução do sistema (1), existirão constantes positivas que limitarão todas as outras soluções, após um ponto t. Partindo deste conceito, pode ser dito que no caso de permanência, a população nunca será extinta, mas também não será infinita.

2 Permanência do sistema (1)

Seja f uma função contínua, positiva e ω-periódica. Considere as seguintes notações

$$m_f = \min_{t\in[0,\omega]} f(t) \text{ e } M_f = \max_{t\in[0,\omega]} f(t).$$

Definição. *O sistema* (1) *é dito permanente se existem constantes* $k, K > 0$ *tais que, se* $x(t) = x(t,\varphi)$ *é uma solução de* (1)*, então*

$$k \leq \lim_{t\to\infty} \inf x(t) \leq \lim_{t\to\infty} \sup x(t) \leq K.$$

O resultado seguinte afirma que se x é solução de (1), então x será limitada superiormente.

Teorema 1. *Toda solução* x *de* (1) *satisfaz* $\lim\limits_{t\to\infty} \sup x(t) < \infty$.

Daqui em diante, podemos assumir que $\lim\limits_{t\to\infty} \sup x(t) \leq c$, onde $0 < c < \infty$.

Para os próximos resultados, consideremos a função $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ definida por

$$h(x) = x\exp(-M_a x), \text{ para } x \in [0,\infty). \tag{2}$$

É fácil ver que h é estritamente crescente em $\left[0, \frac{1}{M_a}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{1}{M_a}, \infty\right)$.

Sob certas condições, toda solução x de (1) satisfaz $\lim\limits_{t\to\infty} \inf x(t) > 0$, é o que veremos na sequência.

Teorema 2. *Se* $m_R \exp(-1) > M_\delta$*, então* $\lim\limits_{t\to\infty} \inf x(t) > 0$*, para toda solução* x *de* (1).

O próximo lema é crucial para concluirmos a permanência do sistema (1).

Lema 1. *Assuma que* $\lambda = \frac{m_R}{M_\delta}\exp(-1) > 1$. *Sejam* $\tilde{t} \geq 0$, $K > \frac{1}{M_a}$ *e* x *uma solução de* (1)*, tais que* $x(t) \leq K$*, para* $t \geq \tilde{t}$.
Seja $k > 0$*, tal que* $M_a k < 1$, $h(k) \leq h(K)$*, onde* h *está definida em* (2)*, e* $\exp(M_a k) \leq \lambda$.
Então, $\lim\limits_{t\to\infty} \inf x(t) \geq k$.

A permanência do sistema (1) é consequência dos resultados anteriores, que será demonstrado a seguir.

Teorema 3. *Se* $\lambda = \frac{m_R}{M_\delta}\exp(-1) > 1$, *então o sistema* (1) *é permanente.*

Demonstração. Sejam $K \geq \max\left\{\frac{1}{M_a}, c\right\}$ e $k \in \left(0, \frac{1}{M_a}\right)$ tais que $k < \frac{1}{M_a}\ln\lambda$ e $h(k) \leq h(K)$.
Dado $\varepsilon > 0$, defina $K_\varepsilon = K + \varepsilon$ e $k_\varepsilon \in (0, k)$ tais que $h(k_\varepsilon) \leq h(K_\varepsilon)$ e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} k_\varepsilon = k$.
Seja x uma soluçao de (1). Denotemos $u = \lim\limits_{t\to\infty}\inf x(t)$ e $v = \lim\limits_{t\to\infty}\sup x(t)$.
Pelo Teorema 1, temos $v \leq c \leq K < K + \varepsilon$.
E, pelo Lema 1, obtemos $u \geq k_\varepsilon$.
Logo,

$$k_\varepsilon \leq u \leq v \leq K_\varepsilon.$$

Consequentemente, ao fazermos ε tender a zero, concluímos

$$k \leq \lim_{t\to\infty}\inf x(t) \leq \lim_{t\to\infty}\sup x(t) \leq K.$$

■

3 Exemplos

Exemplo 1. *Considere o seguinte sistema de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo*

$$\begin{cases} x'(t) = -(2+\cos t)x(t) + (10+\sin t)x(t-|\cos t|)\exp[-(2-\cos t)x(t-|\cos t|)] \\ x(t) = 7,\ t \in [-1, 0] \end{cases}. \tag{3}$$

Temos que $\delta(t) = 2+\cos t$, $R(t) = 10+\sin t$, $a(t) = 2-\cos t$ *e* $\sigma = |\cos t|$.
Então, $M_\delta = 3$, $m_R = 9$ *e* $\lambda = 3\exp(-1) \approx 1.10364 > 1$.
Segue do Teorema 3 que o sistema (3) *é permanente.*

Exemplo 2. *Agora, considere o seguinte sistema de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo*

$$\begin{cases} x'(t) = -(0.5+|\sin t|)x(t) + (13\exp(\cos t))x(t-4\pi)\exp[-(2+\sin t)x(t-4\pi)] \\ x(t) = |t-1|,\ t \in [-4\pi, 0] \end{cases}. \tag{4}$$

Note que $\delta(t) = 0.5+|\sin t|$, $R(t) = 13\exp(\cos t)$, $a(t) = 2+\sin t$ *e* $\sigma(t) \equiv 4\pi$.
Logo, $M_\delta = 1.5$, $m_R = 13\exp(-1)$ *e* $\lambda = \frac{13}{1.5}\exp(-2) \approx 1.17291 > 1$.
Em virtude do Teorema 3, nós concluímos que o sistema (4) *é permanente.*

4 Conclusões

Vemos que sob certas condições, é possível obter permanência para o modelo de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo.

Referências

[1] T. Faria, Global asymptotic behaviour for a Nicholson model with patch structure and multiple delays subdomains. In "Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations", eds., 7033-7046. Elsevier, Lisboa, 2011.

[2] T. Faria, Persistence, permanence and global stability for an n-dimensional Nicholson system. In "Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications", G. Röst, eds., 723-744. Springer, New York, 2014.

Palavras-chave: *Modelo de moscas-varejeiras de Nicholson, Retardo, Permanência.*
Agradecimentos: *Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro.*