



## Simulação do efeito da ressonância através de equações diferenciais: Ponte de Tacoma Narrows

Neuza T. Oro, Cássia C. Beckel, Adriano P. Zeilmann

ICEG - Instituto de Ciência Exatas e Geociências - ICEG - RS

Bairro São José, (BR 285)

99052-900, Passo Fundo, RS

E-mail: neuza@upf.br, cassiacris@upf.br, zeilmann@upf.br

Dentre os diversos exemplos de ressonância associada aos efeitos da vibração, destaca-se o exemplo clássico da ponte de Tacoma Narrows conforme mostra a Figura 1. Esta foi inaugurada em julho de 1940, localizada sobre o Estreito de Tacoma na cidade de Washington, Estados Unidos. No dia 7 de novembro de 1940 após ser atingida por rajadas de vento de até 70km/h sua estrutura oscilou a ponto de entrar em colapso e se partir.

Considerada uma das maiores construções da engenharia naquela época com 1600m de comprimento, apesar de ter sido sustentada por oito pilastras e dois cabos de aço, esta sustentação não foi suficiente para evitar a queda total. Seu movimento oscilatório foi percebido já nos primeiros dias de utilização, balanço que acontecia, pois sua estrutura não estava preparada para os efeitos da ressonância.

O fenômeno da ressonância pode ocasionar falhas mecânicas e deformações em grandes estruturas como a ponte suspensa de Tacoma Narrows. A hipótese inicial para explicar o seu desmoronamento era a de que o vento fez a mesma vibrar em ressonância.

Apresenta-se, neste trabalho, o modelo do desmoronamento da ponte de Tacoma Narrows, conforme mostra a Figura 1, descrito por equação diferencial ordinária proposto por Gilbert N. Lewis[2].

O modelo que descreve o fenômeno considera: um único cabo vertical que funciona como uma mola; e também que o cabo comprimido exerce uma força menor sobre a pista do que quando esticado com o mesmo comprimento.

Assumindo  $b$  como a constante de Hooke para o cabo comprimido e  $a$  quando o cabo estiver esticado, tem-se  $0 < a < b$ . Na ausência de amortecimento, o modelo não linear para o movimento forçado é descrito pela equação diferencial ordinária, conforme a Equação 1:

$$mx'' + F(x) = g(t) \quad (1)$$

sendo:

$$F(x) = \begin{cases} bx, & x \geq 0 \\ ax, & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

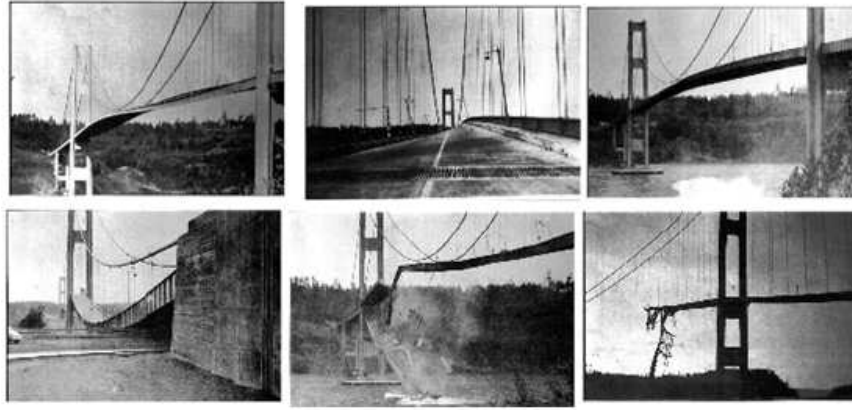


Figura 1: Sequencia de fotos da destruição da ponte de Tacoma Narrows [4].

Para o modelo mostrado na Equação 1, foi suposto que  $m = 1$ ,  $b = 4$ ,  $a = 1$  e  $g(t) = \sin(4t)$  e as condições iniciais são  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = \alpha > 0$ ; e que o vetor velocidade do vento na posição de equilíbrio está para baixo.

A partir da solução obtida na Equação 3, fez-se a simulação do fenômeno para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ , conforme ilustrado na Figura 2:

$$x(t) = \sin(2t) \left[ \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{6} \cos(2t) \right] \quad (3)$$

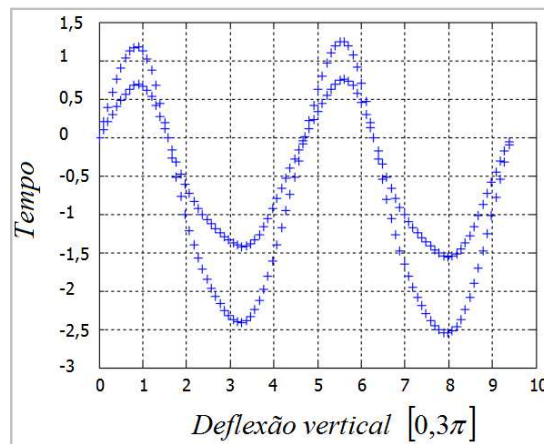


Figura 2: Comparação das simulações com  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ .

O fenômeno da ressonância, caracterizado como a vibração a qual um sistema é exposto, foi a primeira hipótese considerada para a queda da Ponte de Tacoma Narrows. Estudos sobre este assunto apontam que, no caso da ponte, a frequência com que o vento soprava era igual a frequência da ponte.

Segundo [3], um fenômeno de ressonância pode ocorrer toda vez que a frequência da excitação de um sistema físico for igual à frequência natural das oscilações do sistema.

Porém, alguns pesquisadores divergem dessa linha e consideram que a possível causa tenha sido o choque entre a frequência natural da ponte e a força externa exercida pelo vento, que combinado com o não-amortecimento do sistema, fez com que a estrutura de cabramento da

ponte acabasse cedendo ao movimento vibratório dela. Seguindo esta linha, a simplicidade do modelo, aqui apresentado, não descarta a influência da ressonância no desmoronamento da ponte.

## Referências

- [1] J. Gothchy, *Bridging the Narrows*, Peninsula Historical Society, 1990.
- [2] A. C. Lazer and P. J. McKenna, *Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: Some new connections with nonlinear analysis*, SIAM Review, 1990.
- [3] A. M. Luiz, A simulation of the Tacoma Narrows Bridge Oscillations In “The Physics Teacher Simulation Philadelphia, 2000.
- [4] H. Slogoff and B. A. Berner A simulation of the Tacoma Narrows Bridge Oscillations In “The Physics Teacher Simulation Philadelphia, 2000.

**Palavras-chave:** *Equações diferenciais, Ressonância, Vibração*