



Análise qualitativa global de um modelo de Lotka-Volterra

Cristina C. Martins, Laércio J. dos Santos

Departamento de Matemática

ICE - Instituto de Ciências Exatas

UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora

Rua José Lourenço Kelmer, S/n

36036-330, Juiz de Fora, MG

E-mail: cordeirocristina96@gmail.com, ljdsantos@gmail.com.

Neste trabalho estudamos o modelo clássico de Lotka-Volterra, de competição entre duas populações,

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(1 - N - \alpha I) \\ \frac{dI}{dt} = \delta I(1 - I - \beta N), \end{cases} \quad (1)$$

onde N e I representam as densidades das populações nativa e invasora, respectivamente, em relação a suas capacidades suporte. Aqui α e β representam a pressão competitiva de cada população e $\delta = r_I/r_N$ é a razão entre as taxas de reprodução de I e N . Para isso, estudamos alguns conceitos e resultados gerais sobre a teoria qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando a referência [2].

Baseados no artigo [1] estudamos a estabilidade local dos pontos de equilíbrios do sistema (1), e uma função de Lyapunov global que nos permitiu caracterizar a bacia de atração de cada equilíbrio assintoticamente estável. Assim, pudemos verificar que se a taxa de competitividade das populações é desigual, então a forte irá sobreviver e a fraca irá para extinção. No caso em que as duas tem competitividade fraca, haverá coexistência. Por fim, se as duas populações tem competitividade forte, então o modelo apresenta dois equilíbrios assintoticamente estáveis, o que significa que uma população sobreviverá e a outra irá para extinção, dependendo das condições iniciais. Nesse último caso, as fronteiras das bacias de atração coincidem e é a variedade estável de um ponto de sela.

Para entender melhor o modelo, quando as populações tem competitividade forte, precisamos de um estudo mais detalhado para determinar o tamanho e a forma das bacias de atração. Os resultados mostram que quanto maior a taxa de competição interespecífica de uma população, maior é a bacia de atração do equilíbrio estável que representa a predominância da população em questão no ambiente. Além disso, a taxa de natalidade relativa da população influencia na curvatura da fronteira das bacias de atração. A análise da influência deste parâmetro revela que o contexto em que as condições iniciais ocorrem dita qual população tem mais chance de sobrevivência: no caso onde ambas populações começam com um grande número de indivíduos, aquela que tem menor taxa de natalidade vai sobreviver e no caso em que as populações começam com poucos indivíduos, aquela com maior taxa de natalidade irá sobreviver.

Por fim, fizemos uma análise da influência conjunta das taxas de competição e de reprodução e discutimos as implicações biológicas. Concluimos que em termos de estratégia de controle, para a sobrevivência de uma população, é mais eficiente ajustar sua taxa reprodutiva do que aumentar sua competitividade.

Referências

- [1] A.C. Fassoni, L.T. Takahashi and L.J. dos Santos, *Basins of attraction of the classic model of competition between two populations*. Ecological Complexity, 30-48, Elsevier, 2014.
- [2] M.W. Hirsch, S. Smale and R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press, 1974.

Palavras-chave: *Dinâmica populacional, Lotka-Volterra, Competição entre populações, Bacia de atração, Função de Lyapunov*

Agradecimentos: *Agradecemos ao Programa BIC/UFJF pelo apoio financeiro e a FAPEMIG.*