XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Teorema Espectral

Mariza S. Simsen, **Débora Ferreira Ricardo**,
IMC - Instituto de Matemática e Computação - UNIFEI - MG
Avenida BPS, 1303, Pinheirinho
37500-903, Itajubá, MG
E-mail: mariza@unifei.edu.br, debora.ricardo30@gmail.com,

A Teoria Espectral de Operadores Lineares agindo em um Espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$ é a ferramenta mais importante na formulação matemática da Mecânica Quântica. Apresentaremos neste trabalho o Teorema Espectral para Operadores Auto-adjuntos. Este teorema fornece uma descrição completa de tais operadores. O Teorema Espectral generaliza para espaços de dimensão infinita o fato que matrizes Hermitianas em espaços de dimensão finita podem ser diagonalizadas.

A caracterização de Operadores Auto-adjuntos via as medidas espectrais (fornecida pelo Teorema Espectral) é um passo importante para relacionar a classificação espectral com o comportamento dinâmico das soluções da equação de Schrödinger correspondente.

Inicialmente introduzimos os conceitos do Espectro, que generaliza o conjunto de autovalores de Operadores Lineares. Em seguida apresentaremos os conceitos de Operadores Hermitianos e Auto-adjuntos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e as relações entre esses conceitos, em particular veremos condições que garantem quando um operador Hermitiano é Auto-adjunto, ou quando pode ser estendido a um Operador Auto-adjunto.

Para discutir sobre o Teorema Espectral para Operadores Auto-adjuntos é essencial o estudo das Resoluções da identidade (ou Famílias Espectrais), assim definidas: Uma Resolução da Identidade em $\mathcal{H}$ é uma aplicação

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow Proj(\mathcal{H})$$

que satisfaz
(i) $P(\mathbb{R}) = 1$
(ii) Se $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$, com $\Lambda_j \in \mathcal{A}$, $\forall j$, então temos

$$P(\Lambda) = s - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(\Lambda_j)$$

onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

Dada uma resolução da identidade P, para cada $\xi \in \mathcal{H}$ podemos associar uma medida de Borel finita e positiva em $\mathbb{R}$, definida como

$$\mu_\xi = \langle \xi, P(\Lambda)\xi \rangle$$

E a cada par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ podemos associar a medida de Borel complexa

$$\mu_{\xi,\eta} = \langle \xi, P(\Lambda)\eta \rangle$$

Essas medidas são chamadas de medidas espectrais da resolução da identidade P.

Também são definidas as integrais de funções borelianas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com respeito a P, que denotaremos por

$$P(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)dP(t) = \int_{\mathbb{R}} f dP$$

que são operadores lineares.

Diante disso o Teorema Espectral afirma que:
Para cada operador Auto-adjunto $T : domT \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ corresponde uma única resolução da identidade P^T em $\mathcal{H}$, tal que

$$T = \int t dP^T(t).$$

Assim, cada operador Auto-adjunto T é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação $\mathcal{M}_h$, $h(t) = t$ atuando em $L^2_\mu(\mathbb{R} \times \{1, 2, ..., N\})$, μ uma medida de probabilidade e dom $T = \{\xi \in \mathcal{H} : \int t^2 d\mu^T_\xi < \infty\}$.

Note que o teorema fornece uma representação espectral para os operadores Auto-adjuntos e nos diz que a cada operador Auto-adjunto T definido num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, corresponde uma única resolução da identidade P^T.

No caso em que o operador é Auto-adjunto e Compacto o Teorema Espectral tem a seguinte forma: Seja T um operador Auto-adjunto e compacto em $\mathcal{H}$, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$ um autovalor de T e P_j a projeção ortogonal para $N(T_{\lambda_j}), \forall j$. Então

$$T = \sum_j \lambda_j P_j$$

onde essa série converge em norma.

Palavras-chave: *Operador Auto-adjunto, Medida Espectral, Teorema Espectral.*

Agradecimentos: *Agradecemos à CAPES, pelo apoio financeiro.*

Referências

[1] C. R. de Oliveira, *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, Progress in Mathematical Physics, 54. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[2] C. R. de Oliveira, *Introdução à Análise Funcional*, Projeto Euclides - Impa, Rio de Janeiro, 2015.