XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Existência de Soluções para uma classe de Equações Diferenciais Parciais Elípticas Não Lineares envolvendo o Operador p-Laplaciano

Juliano D. B. de Godoi, **Eduardo S. Böer**
CCNE - Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM - RS
Avenida Roraima, 1000
97105-900, Santa Maria, RS
E-mail: jdamiao7@yahoo.com.br, eduardoboer04@gmail.com,

No presente trabalho garantimos a existência de ao menos uma solução fraca para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u + c(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), \text{ se } x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x,u), \text{ se } x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{1}$$

onde c, f, g, Ω e $\partial\Omega$ satisfazem certas condições, encontradas em [2], e $p \in (1, \infty)$. Para tanto, demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema: Suponhamos que as condições dadas para c, f, g, Ω e $\partial\Omega$, em [2], sejam válidas. Além disso, que as funções $F, G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ e $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$, satisfazem a seguinte condição: existem constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R},$ tais que

$$\limsup_{|u|\to+\infty} \frac{pG(x,u)}{|u|^p} \leq \mu \leq \mu_1 \text{ e } \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{pF(x,u)}{|u|^p} \leq \lambda \leq \lambda_1,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \lambda_1\mu_1$. Então, o problema (1) possui ao menos uma solução fraca $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Para demonstrar o mesmo, consideramos os problemas de Steklov e de Neumann, associados ao problema (1). Garantimos a existência de um primeiro autovalor de Steklov (μ_1) e de um primeiro autovalor de Neumann (λ_1) e, a partir destes, determinamos a região do plano $\lambda\mu$, onde há soluções fracas para (1), definidas por

$$\int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + c(x)u^{p-2}uv]dx = \int_\Omega f(x,u)vdx + \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma, \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, ao problema (1), associamos o funcional $I_p : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I_p(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + c(x)u^p dx - \int_{\Omega} F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma, \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{2}$$

onde $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ e $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$. E provamos que o mesmo é diferenciável a Fréchet, com derivada dada por

$$I_p' u(v) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + c(x)u^{p-2}uv]dx - \int_{\Omega} f(x,u)vdx - \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma,$$

para qualquer $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Da aplicação de técnicas variacionais ao funcional definido em (2), segue a validade do teorema.

Referências

[1] H. Brezis, *Functional Analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 614 pages. New York, 2011.

[2] J. D. B. de Godoi, *Problemas de Autovalores de Steklov-Neumann e Aplicações*, Tese de Doutorado em Matemática, 144 pages. Universidade Federal de São Carlos, 2012.

[3] P. H. Rabinowicz, *Minimax methods in critical points theory with applications to differential equations*, American Mathematical Society , 98 pages. Providence, 1986.

[4] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 339 pages. New York, 1976.

[5] M. Willem, *Minimax Theory: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, Birkhauser, 200 pages. Boston, 1996.

Palavras-chave: *Métodos Variacionais, p-Laplaciano*

Agradecimentos: *Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro.*