XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Estudo do arrasto em foguetes de ar comprimido

Felipe T. Zambello , **Felipe L. Q. Costa**, **Gabrielle A. F. Nery**,

Emilly R. R. Rodrigues

Daniel J. Pamplona da Silva, **Rodrigo R. Cuzinatto**

ICT - Instituto de Ciência e Tecnologia - UNIFAL - MG

Rodovia José Aurélio Vilela, 11999 (BR 267 Km 533)

37715-400, Poços de Caldas, MG

E-mail: felipezambello1@gmail.com, felipequinalha97@gmail.com, nery98.aquino@gmail.com, emillyrabelo5@gmail.com

pamplona@unifal-mg.edu.br, cuzinatto@gmail.com

Este projeto é realizado pelos discentes integrantes do grupo PET Ciência, sob a orientação dos professores Daniel Pamplona e Rodrigo Cuzinatto. Nele, é abordada a física que rege os movimentos de queda livre e lançamento oblíquo de um foguete. Para se aproximar do modelo realístico, nas equações de movimento é inserido o termo de arrasto - resistência do ar, o qual é contrário ao movimento. A equação de movimento pode ser escrita de forma compacta por:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mk\vec{v} + \vec{P}, \tag{1}$$

sendo $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ a velocidade, t o tempo, k o coeficiente de arrasto e $\vec{P} = -mg\hat{j}$ é a força peso, em que m a massa e g a aceleração gravitacional. Nota-se que a Equação 1 é identica a equação do movimento sem arrasto, exceto pelo termo de arrasto ($\vec{F_r} = km\vec{v}$), o qual é assumido linear com a velocidade [2], no regime de baixa velocidades.

A Equação 1 pode ser resolvida [1] componente a componente, lembrando que $v_x = dx/dt$ e $v_y = dy/dt$, sendo x e y as componentes horizontal e vertical usuais. A solução é:

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}e^{-kt}, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} + v_{0y}\right)e^{-kt}, \tag{3}$$

onde v_0 é a velocidade inicial do projétil e $v_{0x} = v_0\cos\theta$ e $v_{0y} = v_0\text{sen}\theta$ são suas componentes nas direções x e y respectivamente, sendo θ o ângulo com a horizontal. Após nova integração, as Equações 2 e 3 resultam:

$$x = x_0 + \frac{v_{0x}}{k}(1 - e^{-kt}); \tag{4}$$

$$y = y_0 - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\left(v_{0y} + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}). \tag{5}$$

Com as Equações 4 e 5, é possível inserir dados obtidos experimentalmente e resolver de forma numérica, com o auxílio de um programa computacional, para encontrar o valor do coeficiente de arrasto (k).

A partir das Equações 4 e 5, podemos obter o valor de k, mas não de forma explícita. Uma solução explícita, analítica, porém aproximada, é encontrada assumindo k pequeno e usando a técnica de expansão em série de Taylor. Expandindo, então, a equação resultante até primeira ordem em k, chegamos a expressão:

$$k = \frac{3g}{v_0 \mathrm{sen}\theta}\left(1 - \frac{gT}{2v_0 \mathrm{sen}\theta}\right), \tag{6}$$

onde T é o tempo de voo e v_0 é dada pela expressão:

$$v_0 = \frac{gT}{3\mathrm{sen}\theta}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3R\tan\theta}{2gT^2}}\right), \tag{7}$$

em que R é o alcance horizontal.

Fazendo um procedimento análogo para a queda “livre” com arrasto, obtemos a expressão

$$k' = \frac{6}{gT'^3}\left(\frac{gT'^2}{2} - h\right), \tag{8}$$

onde usamos a notação k' e T' para enfatizar a diferença com respeito ao lançamento oblíquo, ao qual as Equações 6 e 7 dizem respeito. Na Equação 8 k é a altura de queda.

Para a queda “livre” com arrasto, ja foram coletados os valores experimentais de T' e h. Utilizando a Equação 8, com os devidos tratamentos de dados [3], obtivemos o valor do coeficiente de arrasto

$$k' = (0,18 \pm 0,03)s^{-1}. \tag{9}$$

este é o principal resultado experimental deste trabalho até presente momento, no qual estão sendo coletados os dados necessários para a determinação do coeficiente de arrasto k, conforme Equação 6, para o movimento oblíquo. Também serão encontrados os valores numéricos de k e k' a partir das equações transcendentais, sem as aproximações por Taylor, para verificar a qualidades das expansões.

Referências

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,* LTC, 2015.

[2] S. T. Thornton, J. B. Marion, *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas,* Cengage, 2011.

[3] J. H. Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros,* Edgard Blücher, 1996.

Palavras-chave: *Equações diferenciais, Foguetes, Arrasto*

Agradecimentos: *Os autores agradecem ao PET pelo apoio financeiro.*