



Controle Ótimo e Varicela: Custos e Prevenção

Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque, Lucy Tiemi Takahashi

Faculdade de Engenharia, Departamento de Matemática

UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora

Rua José Lourenço Kelmer, s/n

36036-330, Juiz de Fora, MG

E-mail: gustavo.roque@engenharia.ufjf.br, ltiemi@gmail.com.

Neste trabalho, estudamos problemas de Controle Ótimo baseados no livro *Optimal Control Applied to Biological Models* [2]. O problema de Controle Ótimo básico consiste em determinar $u(t)$, a variável de controle, associada a $x(t)$, a variável de estado, que maximizam, ou minimizam, o funcional

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (1)$$

restrito a

$$\begin{cases} x'(t) &= g(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \\ x(t_1) &\text{livre.} \end{cases} \quad (2)$$

Iniciamos os estudos pelo Princípio do Máximo de Pontryagin que fornece as condições necessárias para se resolver esse problema. Porém, o Princípio do Máximo de Pontryagin não garante a existência da solução ótima. Então, fez-se necessário o estudo sobre quais condições seriam suficientes para se garantir a existência e a unicidade da solução ótima. E assim, verificamos que tais condições suficientes estão vinculadas a análise da função $f(t, x(t), u(t))$ ser ou côncava (nos casos de maximização) ou convexa (minimização).

Uma vez entendido o problema de Controle Ótimo estudamos o trabalho de Ferreira [1], que propõe um modelo matemático, baseado em equações diferenciais ordinárias, para descrever a dinâmica entre a varicela e o herpes-zóster, doenças da população humana causadas pelo vírus *varicela zoster*, com um controle sobre a varicela, a vacinação da população suscetível. A varicela e o herpes-zóster, assim como a vacinação geram custos. A teoria de Controle Ótimo é então utilizada para se minimizar um funcional custo, que leva em consideração os gastos gerados com a vacinação, com o tratamento e a internação dos infectados, com varicela ou com herpes-zóster, e com a logística necessária para a vacinação. O modelo proposto por Ferreira para a dinâmica da varicela na população humana, com vacinação, é então utilizado como restrição para minimizar o funcional proposto.

Analisando as simulações feitas por Ferreira, verificamos que ao se aplicar uma vacinação, de forma constante, de 1% da população, a cada instante de tempo os custos considerados pelo funcional proposto são reduzidos de forma significativa, ao se comparar a população sem a estratégia de vacinação. A vacinação ainda diminui a quantidade e intensidade dos surtos de varicela.

Referências

- [1] E. M. Ferreira, *Controle Ótimo: custos no controle de propagações populacionais*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UFJF, 2015.
- [2] S. Lenhart and J. T. Workman. *Optimal Control Applied to Biological Models*. Chapman & Hall/CRC, London, 2007.

Palavras-chave: *Controle Ótimo, Varicela, Dinâmica Populacional, Biomatemática*

Agradecimentos: *Agradecemos ao programa BIC/UFJF pelo apoio financeiro.*