XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Estudos de métodos multigrid na solução de equações do tipo Poisson em malhas regulares

Leticia B. Berlandi, **Analice C. Brandi**
FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP - SP
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: leticiaberlandi@gmail.com, analice@fct.unesp.br

1 Introdução

A discretização de modelos matemáticos que aparecem nas aplicações em dinâmica dos fluidos computacional gera grandes sistemas de equações algébricas do tipo $Ax = b$, onde A é uma matriz quadrada, b é o vetor independente e x é o vetor das incógnitas. A resolução de tais sistemas por métodos diretos não é recomendável, porque a inversão da matriz dos coeficientes é um processo muito caro computacionalmente [2]. Neste contexto, o esquema Correction Scheme (CS) com o método multigrid é considerado neste trabalho no processo de resolução da equação de Poisson bidimensional. A resolução dos sistemas lineares que aparecem em cada malha é calculada por métodos iterativos como os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel. Além disso, é realizada uma comparação entre os erros numéricos cometidos com duas e quatro malhas.

2 Formulação Matemática e Numérica

O presente trabalho trata da resolução da equação de Poisson bidimensional dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad \text{com} \quad x \in [a,b] \quad \text{e} \quad y \in [c,d], \tag{1}$$

onde o sistema linear proveniente de sua discretização pelo método de diferenças finitas é resolvido pelo método multigrid. A idéia básica deste método iterativo é usar um conjunto de malhas e executar alternativamente iterações em cada nível de malha e obter soluções aproximadas desta equação em malhas mais grossas [1].

O objetivo do método multigrid é acelerar a convergência para reduzir o tempo da Unidade Central de Processamento (CPU) necessário para resolver sistemas de equações lineares. No multigrid CS são realizadas iterações na malha mais fina e em cada nível de malha mais grossa são resolvidas apenas equações residuais [3]. Para isto, são usados operadores para transferir informações da malha fina para a malha imediatamente mais grossa (restrição); e da malha grossa para a malha imediatamente mais fina (prolongação). Os sistemas lineares que aparecem em cada malha são resolvidos através de métodos iterativos, os quais têm propriedades para reduzir os erros oscilatórios rapidamente. Sendo assim, neste trabalho são testados os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, como são descritos abaixo.

2.1 Método de Jacobi

O método de Jacobi é o método iterativo mais simples dos dois métodos aqui apresentados. Por outro lado, a sua convergência pode também ser mais lenta. Neste método, tem-se

$$M = D \quad \text{e} \quad N = L + U. \tag{2}$$

Dessa forma, pode-se escrever

$$Ax = b \Leftrightarrow (M + N)x = b \Leftrightarrow Dx = b - (L + U)x. \tag{3}$$

Portanto, escrito na forma matricial o método de Jacobi consiste em

$$Dx^{(k)} = b - (L + U)x^{(k-1)},$$

$$x^{(k)} = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x^{(k-1)}, \tag{4}$$

e, consequentemente, na forma pontual pode ser escrito como

$$x_i{}^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}x_j{}^{(k-1)}}{a_{i,i}}, \tag{5}$$

com $i = 1, 2, .., n$.

2.2 Método de Gauss-Seidel

Diferente do método de Jacobi, no método de Gauss-Seidel considera

$$M = L + D \quad \text{e} \quad N = U. \tag{6}$$

Isso permite escrever

$$Ax = b \Leftrightarrow (M + N)x = b \Leftrightarrow (L + D)x = b - Ux. \tag{7}$$

Portanto, escrito na forma matricial o método de Gauss-Seidel consiste em

$$Dx^{(k)} = b - Lx^{(k)} - Ux^{(k-1)}, \tag{8}$$

ou ainda,

$$(L + D)x^{(k)} = b - Ux^{(k-1)},$$

$$x^{(k)} = (L + D)^{-1}b - (L + D)^{-1}Ux^{(k-1)}. \tag{9}$$

E, consequentemente, na forma pontual pode ser escrito como

$$x_i{}^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j{}^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j{}^{(k-1)}}{a_{i,i}}, \tag{10}$$

com $i = 1, 2, .., n$.

3 Resultados Numéricos

Os resultados apresentados foram obtidos considerando um problema do tipo (1), onde $u(x, y) = sen(x) \cdot cos(y)$ e $f(x, y) = -2 \cdot sen(x) \cdot cos(y)$. Além disso, deve-se considerar que x e y estão definidos no intervalo fechado $[0, 1]$. Ou seja, deve-se considerar um domínio quadrado $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, tal que $f(0, y) = 0$ e $f(x, 0) = sen(x)$ são as condições já conhecidas sobre a fronteira ΩR.

Neste trabalho foi verificada a eficiência do método multigrid, implementado no software MatLab. Para tal verificação, foi realizada uma análise do erro numérico cometido na solução do problema com diferentes espaçamentos $h = k = 0,2; 0,1; 0,05; 0,01; 0,005$, para duas e quatro malhas. E ainda, foi considerado o erro máximo menor ou igual a 10^{-5}. A distribuição do erro máximo absoluto pode ser observada na Tabela 1.

Tabela 1: Erro máximo absoluto cometido em diferentes espaçamentos.

Espaçamento ($h = k$)	2 malhas	4 malhas
0,2	2,0279e-04	2,0276e-04
0,1	5,2098e-05	5,1788e-05
0,05	1,3173e-05	1,3046e-05
0,01	5,2829e-07	5,2341e-07
0,005	1,3209e-07	1,3209e-07

Analisando a Tabela 1, pode-se concluir que com a utilização de quatro malhas a solução numérica se aproxima mais da solução exata do problema. Além disso, quanto maior o refinamento da malha melhor é a aproximação numérica do método em questão, pois o maior erro absoluto diminui à medida em que a malha é refinada.

4 Conclusão

Este trabalho apresentou uma análise da solução da equação de Poisson bidimensional, obtida através do esquema CS com o método multigrid. A comparação dos erros cometidos com duas e quatro malhas foi realizada e verificou-se a eficiência do método numérico para ambos os casos. Porém, sob o ponto de vista de uma melhor aproximação, a solução obtida utilizando-se quatro malhas apresentou um desempenho superior quanto à utilização de duas malhas, pois o erro cometido ao se utilizar duas malhas foi maior do que o erro com quatro malhas.

Referências

[1] W. L. Briggs, V. E. Henson, and S. F. McCormick, *A Multigrid Tutorial*, SIAM, 2000.

[2] J. A. Cuminato, M. Meneguette, *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: técnicas de diferenças finitas*, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[3] P. Wesseling, *An Introduction to Multigrid Methods*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1992.

Palavras-chave: *Diferenças finitas, Método multigrid, Métodos numéricos.*

Agradecimentos: *Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2016/25855-7.*