XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem e a Catenária

Luana C. B. Faquim, **Gisliane A. Pereira**,
ICENE - Instituto de Ciências Exatas, Naturais e Educação - UFTM - MG
Av. Dr. Randolfo Borges Junior, 1400
38064-200, Uberaba, MG
E-mail: luanafaquim@hotmail.com , gialp09@gmail.com.

RESUMO: *Antes de conhecermos a curva da Catenária e compreender a sua fórmula através da demonstração, é de suma importância conhecer um pouco sobre as equações diferenciais que estão muito presentes em nosso cotidiano. Uma equação diferencial pode ser usada, por exemplo, na análise do crescimento e decrescimento de populações. Na demonstração da equação da Catenária é necessário a resolução de uma equação diferencial. Apresentamos, também, algumas aplicações da Catenária.*

Introdução

"Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto uma equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(t)$, t é a variável independente e y a variável dependente." (SANTOS, 2011)

Podemos observar a aplicação dessas equações em várias áreas e em situações que estão presentes no nosso cotidiano, como por exemplo: em aplicações financeiras, no crescimento e decrescimento da população, na variação de temperatura (lei do resfriamento de Newton), no circuito elétrico (lei de Kirchhoff), na reação química, na engenharia civil e entre outros.

Diante disso, podemos agora conhecer um pouco sobre a catenária e compreender a demonstração da equação que representa essa curva. Mas, para falar da catenária é necessário conhecer a função cosseno hiperbólico pois, a curva da catenária é análoga à curva da função cosseno hiperbólico.

A catenária (vem do latim *catena*, que significa "corrente") pode ser representada por um fio suspenso entre dois pontos, onde a única força presente é a gravidade.

Equação da Catenária

O objetivo principal desse trabalho é demonstrar a equação que representa a catenária, para isso, estudamos a modelagem do fio suspenso e resolvemos uma equação diferencial ordinária.

Tomemos $A(0, y)$ o ponto mais baixo do fio. Seja s o comprimento do arco da corda entre o ponto A e o ponto $P(x, y)$ e seja w_0 a densidade linear (peso por unidade de comprimento) do fio. Obtemos a equação diferencial da catenária do fato de que a parte da corrente entre o ponto mais baixo A e $P(x,y)$ está em equilíbrio estático sob a ação de três forças: a tensão constante T_0 no ponto $A(0,y)$, a tensão variável T em $P(x,y)$ que age na direção da tangente devido à flexibilidade do fio e uma força para baixo $w_0 s$ igual ao peso do fio entre esses pontos.

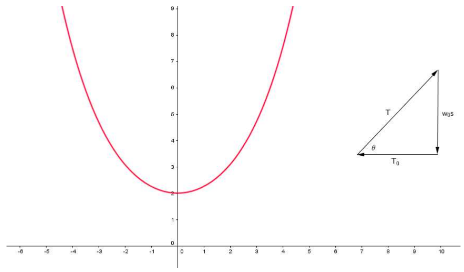

Figura 1: Catenária
Fonte: Próprio Autor

Igualando a componente horizontal de T a T_0 e a componente vertical de T ao peso da corrente, obtemos

$$\cos\,\theta = \tfrac{CA}{Hip} = \frac{T_0}{T} \quad \text{e} \quad \text{sen}\;\theta = \tfrac{CO}{Hip} = \frac{w_0 s}{T} \quad \Rightarrow \quad Tcos\theta = T_0 \quad \text{e} \quad Tsen\theta = w_0 s$$

Assim,

$$\frac{Tsen\theta}{Tcos\theta} = \frac{w_0 s}{T_0} \quad \Rightarrow \quad tg\;\theta = \frac{w_0 s}{T_0}$$

$$\frac{dy}{dx} = as, \text{ onde } a = \frac{w_0}{T_0}$$

Derivando em relação a x,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{ds}{dx}$$

Concluímos que y satisfaz a equação diferencial de 2ª ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (1)$$

Para resolver essa equação introduzimos a variável auxiliar $p = dy/dx$. Substituindo-se em (1) teremos:

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2}$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a \;\; dx \quad \Rightarrow \quad ln(\sqrt{1+p^2}+p) = ax + c_1$$

Para $x = 0$, a derivada de y é nula, ou seja, $p = 0$. Logo $c_1 = 0$

$$\ln(\sqrt{1+p^2}+p) = ax$$

Resolvendo essa equação em p, temos:

$$e^{ax} = \sqrt{1+p^2} + p \qquad (3) \qquad \text{e} \qquad e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}+p} \qquad (4)$$

Fazendo (3) - (4), obtemos:

$$e^{ax} - e^{-ax} = (\sqrt{1+p^2} + p) - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}+p} = 2p$$

Então, temos que:

$$p = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$$

Integrando em relação a x:

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) = \frac{1}{a} cosh\ ax$$

Portanto, a equação da catenária é dada por:

$$y = \frac{1}{a} cosh\ ax$$

A catenária também é utilizada nas redes elétricas e em construções civis, como o Arco de Catenária invertido em Gateway, St. Louis.

Quando se trata de equações diferenciais diferentemente do que pensamos e de algumas aplicações apresentadas inicialmente, elas também surgem de problemas que envolvem a geometria. A catenária é um exemplo onde essa aplicação pode ser notada. O problema é o seguinte: será que é possível pedalar uma bicicleta de roda quadrada? Sim, se a estrada for composta de vários arcos de catenária invertida.

Referências

[1] S. S. Alitolef, *Algumas Aplicações das Equações Diferenciais*, Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Rondônia. Ji-Paraná, 2011.

[2] S. R. Faria, *A Catenária*, Monografia Apresentada ao Programa de Pós Graduação. Belo Horizonte, 2011.

[3] J. B. Gil, *The Catenary (almost) Everywhere*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XII, No. 2, 2005.

[4] Mac Tutor, *The MacTutor History of Mathematics archive*. Disponível em :http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Catenary.html. Acesso em: 13 de Abril de 2017.

[5] R. J. Santos, *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.

Palavras-chave: *Equações Diferenciais; Catenária; Aplicações.*

Agradecimentos: *Agradecemos à FNDE pelo apoio financeiro.*