XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Solução de um problema $M-Linear$ via método de Galerkin

Lucas M. Rocha
ICEX - Instituto de Ciências Exatas - UFMG - MG
Avenida Presidente Antônio Carlos, 6627
31270-901, Belo Horizonte, MG
E-mail: lumath@ufmg.br,

Eder M. Martins, **Wenderson M. Ferreira**,
ICEB - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - UFOP - MG
Campus Morro do Cruzeiro, s/n
35400-000, Ouro Preto, MG
E-mail: eder@iceb.ufop.br, wmf@iceb.ufop.br.

As Equações Diferenciais Parciais clássicas da Onda, do Calor e de Laplace modelam vários fenômenos físicos referentes a vibrações, processos de difusão, processos de transporte, energia potencial de partículas sob ação de forças gravitacionais, dentre outros. Tais equações são geralmente abordadas através de seu método clássico de resolução: o Método de Fourier ou da Separação de Variáveis. O principal ferramental teórico para a abordagem de equações via tal método são as Séries de Fourier.

A abordagem anteriormente descrita nos leva, por diversas vezes, a problemas *bem postos* no sentido de que, sob determinadas hipóteses, obtemos soluções únicas que dependem continuamente dos dados do problema em questão (o que é altamente relevante do ponto de vista de aplicações).

Desta forma, ao abordarmos uma Equação Diferencial Parcial do ponto de vista clássico, estamos interessados por diversas vezes na obtenção de uma fórmula para a solução de um dado problema, na dedução de diversas de suas propriedades, sendo que uma das mais importantes é sua classe de diferenciabilidade. No que se refere a tal classe, vale ressaltar que temos o interesse em garantir que a (possível) solução de uma equação diferencial de ordem k tenha ao menos todas as suas derivadas de ordem até k contínuas, isto é, que seja de classe C^k (apesar de que pode ser bastante útil e interessante se tais soluções tiverem classe de diferenciabilidade maior).

No entanto, nem sempre é possível obtermos uma solução clássica para uma equação diferencial. Mesmo equações relativamente simples como a Equação de Laplace e a de Poisson podem não ter solução exibida explicitamente dependendo do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ em questão e das nãolinearidades envolvidas. Desta forma, somos levados a procurar por soluções que não sejam tão "bem comportadas"como as soluções clássicas e devemos procurar obter candidatos a soluções (e possivelmente soluções) para tais problemas em conjuntos de funções especiais, muitas vezes sem a regularidade C^k citada anteriormente, mas com outras propriedades que nos permitem definir as soluções em *sentido generalizado* ou *sentido fraco*.

A obtenção de soluções em *sentido fraco* é feita muitas vezes utilizando-se argumentos de Análise Funcional. Uma vez obtidas tais soluções, é possível (mas nem sempre) verificarmos que tais soluções possuem regularidade suficiente para serem classificadas como clássicas. Teorias como a dos Espaços de Sobolev, das derivadas fracas, das funções testes, a procura por estimativas *a priori* das soluções, o estudo de resultados de existência de soluções e dos métodos para obtê-los são amplamente aplicadas em estudos desta natureza.

Desta forma, o entendimento das diferenças entre soluções clássicas e soluções fracas é fundamental a todos os que se interessam pelo estudo das Equações Diferenciais e de suas aplicações.

Nosso objetivo é garantir a existência de solução para o problema $M-Linear$

$$\begin{cases} -M(||u||^2)\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^2$ e $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a condição

P_0: existem constantes $t_\infty, p_0 > 0$ tais que $M(t) \geq p_0 > 0$ para todo $t \geq t_\infty$.

Para tanto, utilizaremos fortemente as Teorias sobre soluções fracas, além de resultados tradicionais da Análise Matemática como o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, resultados de convergência no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ e propriedades de seu dual. O método de resolução aplicado será o Método de Galerkin (ver [10]), um método tradicional para se abordar problemas de valor de contorno não reduzidos a problemas variacionais em um domínio limitado.

Referências

[1] BUENO, H., ERCOLE, G., ZUMPANO, A. *(Mais uma) Introdução aos Espaços de Sobolev.* Material utilizado no minicurso "(Mais uma) Introdução aos Espaços de Sobolev"durante o 6° EMED (Encontro Mineiro de Equações Diferenciais).

[2] CHIPOT, Michael. *Eliptic Equations: An Introductory Course.* Institute of Mathematics University of Zürich, 2009.

[3] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations.* Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1998. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19)

[4] de FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.*(4ª edição). Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2012.

[5] GILBARG, D., TRUDINGER, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* New York, Springer, 2001.

[6] IÓRIO, Valéria. *EDP, um Curso de Graduação.* Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, 1991.

[7] KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York, John Wiley & Sons, 1989.

[8] MEDEIROS, L. A. J. M., MIRANDA, M. A. M. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos.* Rio de Janeiro, UFRJ, 2000.

[9] de OLIVEIRA, C. R. *Introdução à Análise Funcional.* (2ª edição). Rio de Janeiro, IMPA, 2007. (Publicações Matemáticas)

[10] REZENDE, V. *O Método de Galerkin.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2005.

Palavras-chave: *Galerkin, Solução Fraca, $M-Linear$*