XI EMED - ENCONTRO MINEIRO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
20 A 22 DE NOVEMBRO DE 2017
POÇOS DE CALDAS-MG

Métodos de Euler e Runge-Kutta através de um Applet do Geogebra

Manoel Wallace A. Ramos
Instituto Federal da Paraíba - IFPB
Av. Primeiro de Maio, 720 - Jaguaribe
58015-435, João Pessoa, PB
E-mail: wallace.ifpb@gmail.com

Flank David M. Bezerra
Departamento de Matemática - UFPB
Av. Contôrno das Cidades, 41-769 - Conj. Pres. Castelo Branco III
58033-455, João Pessoa, PB
E-mail: flank.bezerra@gmail.com

1 Introdução

Os computadores são ferramentas extremamente úteis no estudo de equações diferenciais, uma vez que através deles é possível executar algoritmos que constroem aproximações numéricas para soluções destas equações. Este trabalho é uma introdução ao estudo de métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias. Apresentamos os métodos numéricos de Euler, Euler melhorado e o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Além disso, com o propósito de colaborar com o ensino e aprendizagem de tais métodos, apresentamos um *applet* criado a partir do uso de ferramentas do software *Geogebra*. O *applet* fornece soluções numéricas aproximadas para um problema de valor inicial, bem como exibe os gráficos das soluções que são obtidas a partir dos métodos numéricos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de quarta ordem.

Considere a EDO de primeira ordem na forma

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

em que y é uma função real na variável $x \in \mathbb{R}$ e $y' = dy/dx$. A equação (1) pode possuir infinitas soluções, no entanto, estamos interessados em descobrir uma solução particular que satisfaça a seguinte condição inicial: dados dois números reais x_0 e y_0 queremos uma solução para (1), tal que

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Quando consideramos a equação (1) juntamente com a equação (2) temos então um **problema de valor inicial (PVI)**.

Os métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta são utilizados para encontrar soluções aproximadas de PVIs do tipo (1)-(2). As principais referências bibliográficas para a elaboração deste trabalho foram [1], [2], [3] e [4].

2 O método de Euler

Dentre os métodos numéricos, amplamente divulgados na literatura especializada, para resolução de PVI's, o método mais simples é o método de Euler. Suponha que queremos aproximar a solução do PVI (1)-(2) em $x = x_1 = x_0 + h$, em que h é pequeno e é chamado de passo. A ideia por trás do método de Euler é usar a reta tangente à curva da solução do PVI através de (x_0, y_0) para obter tal aproximação. Sendo assim, o método de Euler para uma aproximação da solução do PVI (1)-(2) através do pontos $x_{n+1} = x_0 + nh \ \ (n = 0, 1, \ldots)$ é dado por

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad n = 0, 1 \ldots \ . \tag{3}$$

3 Método de Euler melhorado

O método de Euler melhorado é um exemplo do que chamamos de **método preditor-corretor**. A ideia é usar a fórmula do método de Euler para obter uma primeira aproximação para a solução $y(x_{n+1})$ do PVI (1)-(2). Denotaremos esta aproximação por y^*_{n+1}, então

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Agora, melhoramos (ou corrigimos) esta aproximação aplicando mais uma vez o método de Euler. Mas desta vez, usamos as médias das inclinações das curvas das soluções através de (x_n, y_n) e (x_{n+1}, y^*_{n+1}). Ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})].$$

Dessa forma, o método de Euler melhorado para encontrar soluções próximas da solução exata do PVI (1)-(2) nos pontos $x_{n+1} = x_0 + nh$ $(n = 0, 1, \ldots)$ é

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})], \tag{4}$$

em que

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

4 Runge-Kutta de quarta ordem

Dentre todos os métodos de Runge-Kutta, o de quarta ordem é o mais conhecido e utilizado. Ele também é conhecido como **método clássico de Runge-Kutta**. O método de Runge-Kutta mais popular, de acordo com Boyce e DiPrima [1], é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)],$$

em que

$$\begin{aligned}
c_1 &= f(x_n, y_n), \\
c_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}c_1), \\
c_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}c_2), \\
c_4 &= f(x_n + h, y_n + hc_3).
\end{aligned}$$

5 Applet no Geogebra para soluções numéricas de PVIs

Realizar cálculos, de forma manual, dos métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de quarta ordem é tedioso e oneroso. Contudo, estes métodos podem ser implementados, através de rotinas, em diversos softwares, tais como *Maple*, *Matlab*, *Maxima* e *Mathematica*. No entanto, é necessário ter noções de programação para a implementação de tais métodos nos referidos softwares. Neste trabalho é apresentado um *applet* que de forma interativa e dinâmica fornece a solução exata de um PVI, bem como as soluções numéricas pelo método de Euler, método de Euler melhorado e pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. O *applet* também exibe o erro absoluto e a poligonal da solução aproximada para cada método. Além disso, é possível escolher qual solução se quer exibir ou até mesmo todas elas. O *applet* foi criado no software de geometria dinâmica *Geogebra 5.0*. A interface do *applet* é apresentada na Figura 1.

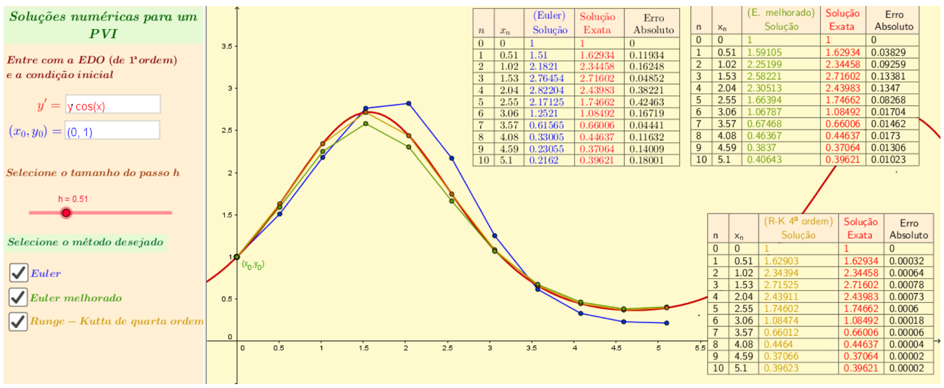

Figura 1: Applet: Métodos numéricos para EDO. Disponível em `https://geogebra.org/m/xTz9CaRY`.

6 Considerações finais

Neste trabalho fizemos uma introdução ao estudo de métodos numéricos de passo simples que são utilizados na resolução de problemas de valor inicial. Propomos um *applet*, construído no *Geogebra* e disponibilizado na web, que mostra as soluções numéricas de um problema de valor inicial utilizando os métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de quarta ordem. Esperamos que o *applet* seja uma ferramenta útil no ensino e aprendizagem de métodos numéricos e que este trabalho possa motivar professores a criar *applets*, ou melhorar o aqui apresentado, de forma conveniente.

Referências

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equacões Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[2] BUTCHER, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.

[3] CHAPRA, S. C.; CANALE R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

[4] ZILL, D. G. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. 9. ed. Stanford, Cengage Learning, 2008.

Palavras-chave: *Métodos numéricos, Euler, Runge-Kutta, Applets*

Agradecimentos: *Agradecemos ao IFPB pelo apoio financeiro.*