XI EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais
20 a 22 de Novembro de 2017
Poços de Caldas-MG

Resolução da equação de Poisson não linear via diferenças finitas compactas

Rafael L. Sterza, **Analice C. Brandi**
FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP - SP
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: rlsterza@gmail.com, analice@fct.unesp.br

1 Introdução

Problemas de equilíbrio são aqueles em que a propriedade de interesse não depende da evolução temporal. Na maioria das vezes esses problemas são modelados por equações diferenciais parciais elípticas. Por exemplo, a equação de Poisson pode representar o movimento de um fluido viscoso incompressível a baixa velocidade, que representa um fenômeno linear [2]. Entretanto, a maior parte das equações que modelam os fenômenos físicos são caracterizadas pela sua não linearidade e lidar com equações desse tipo pode significar uma tarefa bastante complicada.

Tratando-se de equações não lineares, o sistema resultante é também não linear e portanto é mais conveniente buscar sua solução através do método de Newton. Neste contexto, o objetivo deste trabalho é resolver um problema não linear através do método de diferenças finitas compactas em diferentes malhas comparando os resultados numéricos com resultados presentes na literatura, verificando o comportamento e eficiência do método na obtenção da solução.

2 Formulação Matemática

Uma das principais equações elípticas que representam os problemas de equilíbrio é a equação de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u). \tag{1}$$

Uma característica dos problemas modelados por equações diferenciais parciais elípticas é que as propriedades físicas de problemas elípticos se propagam em todas as direções dentro da região Ω, afetando os pontos interiores, e por este motivo suas condições de contorno normalmente são especificadas ao longo de toda fronteira [2].

3 Formulação Numérica

Um problema envolvendo uma equação diferencial pode ser resolvido por três tipos de abordagem. A abordagem analítica fica restrita a problemas simples e lineares. Problemas complexos tornam-se difíceis ou até mesmo impossíveis de se resolver analiticamente, por conta da insuficiência dos métodos existentes. A abordagem experimental é capaz de produzir resultados mais realísticos, em contrapartida possui limitações de ordem espacial, pois requer estrututas que suportem o experimento, dependendo de processos operacionais caros e longos. Enquanto isso, a abordagem computacional é capaz de solucionar equações com alto nível de complexidade, não havendo restrições a geometrias e processos complicados. É necessário um cuidado especial na construção da modelagem, para que de fato, seja uma equação que represente o fenômeno estudado. Erros de truncamento são inerentes ao processo, mas técnicas de convergência e estabilidade são incorporadas, garantindo a validade dos resultados.

A primeira etapa para resolução de qualquer método numérico envolvendo equações diferenciais parciais é discretizar a região onde se procura a solução. Para a discretização define-se uma malha, que é um conjunto finito de pontos pertencentes ao domínio, chamados nós da malha [1].

3.1 Método de Diferenças Finitas Compactas

A resolução da equação (1) foi realizada pelo método de diferenças finitas compactas que utiliza aproximações para as derivadas de alta ordem

$$\frac{1}{6}(U_{i-1,j}+U_{i+1,j}+U_{i,j-1}+U_{i,j+1})+\frac{2}{3}(U_{i-1,j+1}+U_{i-1,j-1}+U_{i+1,j-1}+U_{i+1,j+1})+$$
$$-\frac{10}{3}U_{i,j}=-\frac{h^2}{12}(f_{i-1,j}+f_{i+1,j}+f_{i,j-1}+f_{i,j+1}+8f_{i,j}), \tag{2}$$

onde a equação (2) representa o método compacto de 4ª ordem [3] e [5].

3.2 Método de Newton

Considerando um sistema de equações não lineares onde $f=[f_1,...,f_n]^T$ e $x=[x_1,...,x_n]^T$, escreve-se o sistema na forma compacta $f(x)=0$. O método de Newton para aproximar raízes de uma função escalar f é dado por:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k\geq 0 \quad \text{e} \quad f'(x^{(k)})\neq 0, \tag{3}$$

considerando k a quantidade de iterações e $x^{(0)}$ a aproximação inicial da solução de f, que deve ser escolhida de maneira conveniente, pois esta aproximação deve estar próxima da solução analítica para garantir que a solução do método iterativo convirja para a solução do sistema.

Para aplicar este método em um sistema não linear, substitui-se a primeira derivada da função escalar f pela matriz jacobiana J_f da função vetorial f cujas componentes são,

$$(J_f)_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i,j=1,2,...,n.$$

Com isso, basta resolver: $J_f(x^{(k)})\Delta x^{(k)}=-f(x^{(k)})$, onde $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)}$. Assim, o método de Newton aplicado a um sistema não linear requer, em cada passo, a resolução de um sistema linear de matriz $J_f(x^{(k)})$ [6].

4 Resultados Numéricos

A análise dos métodos numéricos tratados nas seções anteriores, é realizada tomando $f(x,y,u)=\frac{\pi^2}{4}u(1-u)+2\sin(\frac{\pi}{2}y)+\frac{\pi^2}{4}(1-x^2)^2\sin^2(\frac{\pi}{2}y)$ na equação (1), definida num quadrado com $0\leq x,\ y\leq 1$ e condição de contorno do tipo de Dirichlet definido por $u(x,y)$, sendo u a solução analítica dada por $u(x,y)=(1-x^2)\sin(\frac{\pi}{2}y)$[4].

Após a discretização pelo método de diferenças finitas compactas de 4ª ordem, o sistema não linear resultante foi resolvido pelo método de Newton, considerando um vetor de solução inicial $x^{(0)}=[0,0,...,0]^T$. Essas simulações foram realizadas utilizando duas malhas: a malha grossa ($h=0.25$) e a malha fina ($h=0.125$). Além disso, foi utilizada como comparação a quantidade de iterações realizadas em cada simulação e o erro máximo absoluto (E) dado por $E = \max |x^{(k)} - x|$, obtidas neste trabalho com a solução presente no artigo de Pandey (2013).

Tabela 1: Comparação de resultados numéricos obtidos neste trabalho e resultados da literatura.

	Método compacto de 4ª ordem		**Pandey (2013) [5]**	
Malha	**Erro**	**Iterações**	**Erro**	**Iterações**
Grossa	7.7283e-06	4	7.6890e-06	11
Fina	5.3173e-07	4	4.7684e-07	16

Nota-se que as aproximações obtidas com o método compacto de 4ª ordem foram eficientes para o problema exposto, sendo que os resultados deste trabalho e os obtidos no artigo de Pandey (2013) foram semelhantes. Além disso, com o refinamento da malha o método apresentou melhores resultados, com um baixo número de iterações.

5 Conclusões

Este trabalho apresentou uma análise do método numérico empregado na obtenção de resultados numéricos para a solução da equação de Poisson bidimensional não linear. Essa análise mostrou que o método de diferenças finitas compactas é eficiente por apresentar bons resultados e, responde bem ao refinamento da malha, calculando melhores aproximações em malhas mais finas. De modo geral, o método compacto de 4ª ordem apresentou bom desempenho em problemas elípticos não lineares. Com a aproximação inicial adotada o método foi capaz de convergir após realizar poucas iterações.

Referências

[1] CUMINATO, J.A.; MENEGUETTE Jr., M. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] FORTUNA, A.O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos:** conceitos básicos e aplicações. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2012.

[3] LELE, S. K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution. *Journal of Computational Physics*, vol 103, p. 16-42, 1992.

[4] HU, H. Y.; CHEN, J.S. Radial basis collocation method and quasi Newton iteration for nonlinear elliptic problems, *Wiley InterSciense*, vol. 24, p. 991-1017, 2008.

[5] OKORO, F. M.; OWOLOKO, A.E. Compact Finite Difference scheme for Poisson equation using direct solver, *Journal of Mathematics and Technology*, vol 3, p. 130-138, 2010.

[5] PANDEY, P. K.; A higher accuracy exponential finite difference method for the numerical solution of second order elliptic partial differential equations, *Journal of Mathematical and Computational Science*, vol 3, n. 5, p. 1325-1334, 2013.

[6] QUARTERONI, A.; SALERI, F. **Cálculo científico com MATLAB e Octave.** 2. ed. Milano: Springer-Verlag Italia, 2006.

Palavras-chave: *Equação de Poisson não linear. Diferenças finitas compactas. Método de Newton.*

Agradecimentos: *Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2016/17849-7.*