

Modelando uma Onda de Gás via Equação de Burgers

Thiago Alves de Souza¹

Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela²

^{1 2} Departamento de Matemática, PPG em Modelagem Matemática e Computacional, UFRRJ, Seropédica-RJ

Neste trabalho modela-se uma onda de gás através da equação de Burgers. A equação de Burgers é uma equação diferencial parcial (EDP) proposta por Burgers em 1948 [1] como um modelo simplificado, derivado das equações de Navier-Stokes. Essa equação guarda os efeitos não lineares advectivos, assim com os efeitos viscosos difusivos.[2]

Considere um elemento de massa de uma substância contínua, suponha que a dinâmica esteja ocorrendo em uma única direção. Utilizando a 2ª lei de Newton temos dm para o elemento de massa. Tomando a área de corte A , onde a onda move na direção x com velocidade $u(x, t)$, temos:

$$F_x = dma_x$$

$$F_x = dm\left(\frac{du_x}{dt}\right)$$

$$F_x = \rho \frac{du_x}{dt} A dx$$

Sendo a velocidade variando de duas maneiras, primeiro a velocidade varia com o tempo e em seguida com um certo espaço e o elemento de massa muda sua posição com o tempo, como podemos ver abaixo:

$$F_x = \rho \frac{du_x}{dt} A dx$$

$$F_x = \left(\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) A dx$$

$$F_x = \left(\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) A dx$$

A força F_x que atua no elemento de massa pode ser de três tipos, primeiro pode haver uma força externa, como a força gravitacional, um gradiente de pressão e por último forças intermoleculares dentro do meio, que pode também ser vista nesse caso como a viscosidade. Vamos nesse caso assumir que todas essas forças são nulas, e obtemos o seguinte resultado.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$

Onde temos a equação de Burgers invíscida (isto é, sem viscosidade), que é uma EDP não linear na qual as soluções podem desenvolver ondas de choque. Na qual será tratada com mais detalhes com o *método das características* e uma análise do ponto de vista na lei conservação e um estudo que ainda está em andamento, pois não

vou detalhar aqui no momento que é a entropia como um agente estabilizador nas soluções de choque.

Referências:

[1] DAH-TENG, J. Forced Model Equation for Turbulence, the Physics of Fluids 12, 10, 2006-2010 (1969).

[2] ESCHENAZI, C. S. Leis de Conservação e Aplicações ao Tráfego nas Cidades. 1º Colóquio da Região Sudeste, Universidade Federal de Minas Gerais, abr. 2011